МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 517.926 Научная статья
DOI: 10.35330/1991-6639-2024-26-6-19-25
EDN: BOUNKR

Начальная задача для уравнения дробного порядка с производной Герасимова–Капуто с инволюцией

Л. М. Энеева

Институт прикладной математики и автоматизации –
филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук
360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

Аннотация. В работе рассматривается линейное обыкновенное дифференциальное уравнение с производной дробного порядка в смысле Герасимова–Капуто. Рассматриваемое уравнение относится к классу дифференциальных уравнений, возникающих, в частности, при исследовании краевых задач для дифференциальных уравнений, содержащих композицию лево- и правосторонних производных дробного порядка, которые, в свою очередь, выступают основой при моделировании различных физических и геофизических процессов. В частности, такие уравнения возникают при описании диссипативных колебательных систем. В работе для рассматриваемого уравнения исследуется начальная задача в единичном интервале. Доказана теорема существования и единственности решения исследуемой задачи, построено явное представление решения.

Ключевые слова: уравнение дробного порядка, задача Коши, производная Герасимова–Капуто, инволюция, фундаментальное решение

Поступила 12.10.2024, одобрена после рецензирования 10.11.2024, принята к публикации 29.11.2024

Для цитирования. Энеева Л. М. Начальная задача для уравнения дробного порядка с производной Герасимова–Капуто с инволюцией // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2024. Т. 26. № 6. С. 19–25. DOI: 10.35330/1991-6639-2024-26-6-19-25

MSC: 26A33, 34B05 Original article

Initial value problem for a fractional order equation with the Gerasimov–Caputo derivative with involution

L.M. Eneeva

Institute of Applied Mathematics and Automation –
branch of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
360000, Russia, Nalchik, 89 A Shortanov street

Abstract. The paper considers a linear ordinary differential equation with a fractional derivative in the Gerasimov–Caputo sense. The equation under consideration belongs to the class of differential equations that arise, in particular, in the study of boundary value problems for differential equations containing a composition of left- and right-hand derivatives of fractional order, which, in turn, serve as the basis for modeling various physical and geophysical processes. In particular, such equations arise when describing dissipative oscillatory systems. In this work, the initial value problem in the unit interval is studied for the equation under consideration. A theorem for the existence and uniqueness of a solution to the problem under study is proven, and an explicit representation of the solution is constructed.

Keywords: fractional order equation, Cauchy problem, Gerasimov–Caputo derivative, involution, fundamental solution

Submitted 12.10.2024, approved after reviewing 10.11.2024, accepted for publication 29.11.2024

For citation. Eneeva L.M. Initial value problem for a fractional order equation with the Gerasimov–Caputo derivative with involution. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS.* 2024. Vol. 26. No. 6. Pp. 19–25. DOI: 10.35330/1991-6639-2024-26-6-19-25

1. Введение

Рассмотрим уравнение

$$\partial_{0x}^{\alpha}u(x) - \lambda I_x u(x) = f(x), \tag{1}$$

где ∂_{0x}^{α} – дробная производная Герасимова–Капуто порядка α $(0 < \alpha < 1)$, I_x – оператор инволюции, $f(x)$ – заданная, а $u(x)$ – искомая функции. Уравнение (1) будем рассматривать в интервале $0 < x < 1$.

Производные Римана–Лиувилля и Герасимова–Капуто порядка $\alpha \in]0,1[$ с началом в точке $x = 0$ задаются, соответственно, равенствами [1]

$$D_{0x}^{\alpha}g(x) = \frac{d}{dx}D_{0x}^{\alpha-1}g(x) \qquad \text{и} \qquad \partial_{0x}^{\alpha}g(x) = D_{0x}^{\alpha-1}g'(x),$$

где $D_{0x}^{\alpha-1}$ – дробный интеграл Римана–Лиувилля [1],

$$D_{0x}^{-\beta}\, u(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x u(t)(x-t)^{\beta-1}\,dt \qquad (\beta > 0).$$

Отметим, что производная Римана–Лиувилля и производная Герасимова–Капуто связаны соотношением [1]

$$\partial_{0x}^{\alpha}g(x) = D_{0x}^{\alpha}[g(x) - g(0)] \qquad (0 < \alpha < 1).$$

Это соотношение несколько расширяет область определения оператора ∂_{0x}^{α}, и в дальнейшем мы именно его рассматриваем в качестве определения этого оператора.

Оператор инволюции I_x для функции $g(x)$, заданной на отрезке $[0,1]$, определяется соотношением

$$I_x g(x) \coloneqq g(1-x).$$

Уравнение (1) относится к классу обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка с инволюцией. Необходимость исследовать такие уравнения возникает, в частности, при решении уравнений, содержащих композиции производных дробного порядка с различными началами, которые, в свою очередь, выступают основой при моделировании различных физических и геофизических процессов. Так, в работе [2] был предложен подход к решению краевых задач для уравнений дробного порядка, содержащих композицию лево- и правосторонних производных дробного порядка в смысле Римана–Лиувилля и Герасимова–Капуто, возникающих при моделировании диссипативных колебательных систем [3–8], основанный на редукции изучаемых задач к исследованию уравнений дробного порядка с инволюцией. В работе [9] рассмотрено уравнение вида (1) с производной Римана–Лиувилля. В частности, найдено фундаментальное решение, построено представление решения исследуемой задачи.

В настоящей работе, используя результаты работы [9], мы решаем начальную задачу для уравнения (1), доказываем теорему существования и единственности рассматриваемой задачи и в терминах фундаментального решения, найденного в работе [9], строим явное представление решения.

2. Постановка задачи и вспомогательные утверждения

Регулярным решением уравнения (1) будем называть функцию $u(x) \in AC[0,1]$, удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках интервала $]0,1[$. Здесь, как обычно, $AC[0,1]$ будет обозначать пространство абсолютно непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций.

Начальная задача формулируется следующим образом: *найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию*

$$u(0) = u_0. \tag{2}$$

Рассмотрим функцию $F_{\alpha,\lambda}(x,t)$, которая определяется [9] как решение интегрального уравнения

$$F_{\alpha,\lambda}(x,t) = \lambda\, Q_x^{\alpha} F_{\alpha,\lambda}(x,t) + q_0(x,t) \qquad (0 < x,t < 1), \tag{3}$$

где оператор Q_x^{α} и функция $q_0(x,t)$ задаются соответственно равенствами

$$Q_x^{\alpha} := D_{0x}^{-\alpha}\, I_x$$

и

$$q_0(x,t) := \frac{(x-t)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Здесь и далее

$$z_+^{\mu} := \begin{cases} z^{\mu}, & \text{при } z > 0, \\ 0, & \text{при } z = 0, \end{cases} \qquad (\mu \in \mathbb{R}).$$

В работе [9] показано, что оператор Q_x^{α} можно представить в виде

$$Q_x^{\alpha}\, g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{1-x}^{1} (s + x - 1)^{\alpha-1}\, g(s)\, ds,$$

и, кроме того, справедливо включение

$$Q_x^{\alpha}(L[0,1]) \subset L[0,1].$$

Примем следующие обозначения:

$$\|g(x)\|_{(a,\mu)} := \sup_{[0,1]} \frac{|g(x)|}{|x-a|^{-\mu} + |x+a-1|^{-\mu}}$$

и

$$M_a^{\mu}[0,1] := \left\{ g(x) \in C([0,1] \setminus \{a, 1-a\}) \colon \|g(x)\|_{(a,\mu)} < \infty \right\}.$$

Определение. *Множество всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых уравнение*

$$g(x) = \lambda\, Q_x^{\alpha} g(x) \qquad (0 < x < 1)$$

не имеет в пространстве $M_t^{1-\alpha}[0,1]$ для всех $t \in [0,1]$ отличных от тождественного нуля решений, обозначим через S_α.

Как доказано в [9], принадлежность λ множеству S_α гарантирует однозначную разрешимость уравнения (3) и существование функции $F_{\alpha,\lambda}(x,t)$.

В работе [9], в частности, показано, что

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C}:\ \ |\lambda| < \frac{1}{C_\alpha}\right\} \subset S_\alpha,$$

где

$$C_\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}.$$

Таким образом, неравенство $|\lambda| < \frac{1}{C_\alpha}$ является достаточным условием существования функции $F_{\alpha,\lambda}(x,t)$.

3. Основной результат

Пусть $u(x)$ – регулярное решение задачи (1), (2). Принимая во внимание определения операторов дробного дифференцирования (см. Введение) и условие (2), можем записать

$$\partial_{0x}^{\alpha}\, u(x) = D_{0x}^{\alpha}\,[u(x) - u(0)] = \ D_{0x}^{\alpha}\, u(x) - \frac{u_0\, x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \tag{4}$$

С учетом (4) уравнение (1) примет вид

$$D_{0x}^{\alpha} u(x) - \lambda I_x u(x) = f(x) + \frac{u_0\, x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \tag{5}$$

Принимая во внимание непрерывность регулярного решения вплоть до нуля, имеем

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1} u(x) = 0. \tag{6}$$

Таким образом, мы показали, что всякое регулярное решение задачи (1), (2) является решением задачи (5), (6). Теперь, если $\lambda \in C_\alpha$ и $f(x) \in M_0^{1-\alpha}[0,1]$, то, как показано в [9], решение задачи (5), (6) и, следовательно, решение задачи (1), (2) имеет вид

$$u(x) = \int_0^1 F_{\alpha,\lambda}(x,t)\left[f(t) + \frac{u_0\, t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right] dt =$$

$$= \int_0^1 F_{\alpha,\lambda}(x,t)\, f(t)\, dt + \frac{u_0}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 F_{\alpha,\lambda}(x,t)\, t^{-\alpha}\, dt.$$

Нетрудно заметить, что

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 F_{\alpha,\lambda}(x,t)\, t^{-\alpha}\, dt = \left[D_{1t}^{\alpha-1} F_{\alpha,\lambda}(x,t)\right]_{t=0},$$

где

$$D_{1t}^{\alpha-1} g(t) \coloneqq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_t^1 g(s)\,(s-t)^{-\alpha}\ ds$$

– (правосторонний) дробный интеграл Римана–Лиувилля порядка $1-\alpha$ с началом в точке $t = 1$.

Теорема. *Пусть* $\lambda \in C_\alpha$, $\alpha \in [0,1]$ *и* $f(x) \in C[0,1]$. *Тогда регулярное решение задачи (1), (2) существует, единственно и имеет вид*

$$u(x) = u_0\left[D_{1t}^{\alpha-1} F_{\alpha,\lambda}(x,t)\right]_{t=0} + \int_0^1 F_{\alpha,\lambda}(x,t)\, f(t)\, dt. \tag{7}$$

Доказательство. Тот факт, что регулярное решение задачи (1), (2), в случае его существования, имеет вид (7), следует из рассуждений, приведенных перед формулировкой теоремы. Отсюда, в частности, в силу линейности задачи (1), (2) следует единственность решения.

Докажем, что функция $u(x)$, представимая в виде (7), является решением задачи (1), (2). Примем обозначения

$$G_0(x) \coloneqq \left[D_{1t}^{\alpha-1} F_{\alpha,\lambda}(x,t)\right]_{t=0} \qquad \text{и} \qquad G_f(x) \coloneqq \int_0^1 F_{\alpha,\lambda}(x,t)\, f(t)\, dt. \tag{8}$$

Рассмотрим функцию

$$G(x,t) = D_{1t}^{\alpha-1} F_{\alpha,\lambda}(x,t). \tag{9}$$

С учетом обозначения (9), подействовав на обе части равенства (3), имеем

$$G(x,t) = \lambda\, Q_x^\alpha G(x,t) + D_{1t}^{\alpha-1} q_0(x,t).$$

Нетрудно заметить, что

$$D_{1t}^{\alpha-1} q_0(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_t^1 (x-s)_+^{\alpha-1}\,(s-t)^{-\alpha}\, ds.$$

Отсюда следует, что $D_{1t}^{\alpha-1} q_0(x,t) = 0$, если $x \le t$ и

$$D_{1t}^{\alpha-1} q_0(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_t^x (x-s)^{\alpha-1}\,(s-t)^{-\alpha}\, ds = 1,$$

если $x > t$. То есть

$$D_{1t}^{\alpha-1} q_0(x,t) = H(x-t),$$

где $H(z)$ – функция Хевисайда,

$$H(z) := \begin{cases} 0, & \text{если } z \le 0, \\ 1, & \text{если } z > 0. \end{cases}$$

Таким образом, функция $G(x,t)$ является решением уравнения

$$G(x,t) = \lambda\, Q_x^\alpha G(x,t) + H(x-t).$$

И, в частности,

$$G(x,0) = \lambda\, Q_x^\alpha G(x,0) + 1.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{x\to 0} G(x,0) = 1$$

и с учетом (4)

$$\partial_{0x}^\alpha G(x,0) = D_{0x}^\alpha [G(x,0) - 1] = \lambda\, I_x\, G(x,0).$$

Принимая во внимание обозначения (8) и (9), нетрудно заметить, что $G_0(x) = G(x, 0)$. Таким образом, получаем, что функция $G_0(x)$ является решением исследуемой задачи для однородного уравнения:

$$\partial_{0x}^{\alpha} G_0(x) - \lambda\, I_x\, G_0(x) = 0, \qquad G_0(0) = 1. \tag{10}$$

Далее, в силу свойств $F_{\alpha,\lambda}(x,t)$ (см. лемму 4, а также формулу (24) в [9]) имеем

$$G_f(0) = 0$$

и, принимая во внимание (4), получаем

$$\partial_{0x}^{\alpha} G_f(x) = D_{0x}^{\alpha}\, G_f(x) = \lambda \frac{d}{dx} \int_0^1 \left[D_{0x}^{-1} I_x F_{\alpha,\lambda}(x,t) - H(x-t)\right] f(t)\, dt =$$

$$= \lambda \int_0^1 F_{\alpha,\lambda}(1-x,t)\, f(t)\, dt + f(x) = \lambda\, I_x\, G_f(x) \; + f(x).$$

Таким образом, $G_f(x)$ является решением задачи

$$\partial_{0x}^{\alpha} G_f(x) - \lambda\, I_x\, G_f(x) = f(x), \qquad G_f(0) = 0. \tag{11}$$

Из (10) и (11), с учетом обозначений (8), следует, что функция $u(x)$, определенная равенством (7), является искомым решением задачи (1), (2). Это завершает доказательство теоремы.

Заключение

В работе для рассматриваемого уравнения исследована начальная задача в единичном интервале. Доказана теорема существования и единственности решения исследуемой задачи, построено явное представление решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.

Nakhushev A.M. *Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye* [Fractional calculus and its application]. Moscow: FIZMATLIT, 2003. 272 p. (In Russian)

2. *Энеева Л. М.* К вопросу о решении смешанной краевой задачи для уравнения с производными дробного порядка с различными началами // Доклады Адыгской международной академии наук, 2023. Т. 23. № 4. С. 62–68. DOI: 10.47928/1726-9946-2023-23-4-62-68

Eneeva L.M. On the question of solving a mixed boundary value problem for an equation with fractional derivatives with different origins. *Reports of the Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences.* 2023. Vol. 23. No. 4. Pp. 62–68. DOI: 10.47928/1726-9946-2023-23-4-62-68. (In Russian)

3. Stankovi´c B. An equation with left and right fractional derivatives. *Publications de l'institute math´ematique. Nouvelle serie.* 2006. Vol. 80(94), Pp. 259–272.

4. Atanackovic T.M., Stankovi´c B. On a differential equation with left and right fractional derivatives. *Fractional Calculus and Applied Analysis*. 2007. Vol. 10. No. 2. Pp. 139–150.

5. Torres C. Existence of a solution for the fractional forced pendulum. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics.* 2014. Vol. 13. No. 1. Pp. 125–142.

6. Eneeva L.M., Pskhu A.V., Potapov A.A. et al. Lyapunov inequality for a fractional differential equation modelling damped vibrations of thin film MEMS. *Advances in Intelligent Systems and Computing.* ICCD2019 (paper ID: E19100). 2021.

7. Rekhviashvili S.Sh., Pskhu A.V., Potapov A.A. et al. Modeling damped vibrations of thin film MEMS. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. ICCD2019 (paper ID: E19101). 2021.

8. Eneeva L., Pskhu A., Rekhviashvili S. Ordinary differential equation with left and right fractional derivatives and modeling of oscillatory systems. *Mathematics*. 2020. Vol. 8(12). P. 2122. DOI: 10.3390/math8122122

9. *Энеева Л. М.* Задача Коши для уравнения дробного порядка с инволюцией // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 48. № 3. С. 43–55. DOI: 10.26117/2079-6641-2024-48-3-43-55

Eneeva L.M. Cauchy problem for fractional order equation with involution. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2024. Vol. 48. No. 3. Pp. 43–55. DOI: 10.26117/2079-6641-2024-48-3-43-55. (In Russian)

Финансирование. Исследование проведено без спонсорской поддержки.

Funding. The study was performed without external funding.

Информация об авторе

Энеева Лиана Магометовна, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. отдела математического моделирования геофизических процессов, Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук;

360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А;

Eneeva72@list.ru, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2530-5022, SPIN-код: 3403-8412

Information about the author

Liana M. Eneeva, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher of Department of Mathematical Modeling of Geophysical Processes at the Institute of Applied Mathematics and Automation of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences;

360000, Russia, Nalchik, 89 A Shortanov street;

Eneeva72@list.ru, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2530-5022, SPIN-code: 3403-8412