МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 517 Научная статья
DOI: 10.35330/1991-6639-2024-26-6-13-18
EDN: AMHSFW

Задача с данными на параллельных характеристиках для нагруженного уравнения колебания струны

А. Х. Аттаев

Институт прикладной математики и автоматизации –
филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук
360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

Аннотация. Теория нагруженных уравнений является весьма актуальной как в теоретическом плане, так и в ее многочисленных практических применениях в различных областях современного естествознания. Этим объясняется выход огромного количества работ по исследованию и применению нагруженных уравнений за последние неполные пятьдесят лет. Основная цель исследования – показать, что нагруженные уравнения могут выступать как метод постановки новых корректных краевых задач. Доказательство корректности поставленной задачи основывается на формуле Даламбера, полученной для исследуемого нагруженного уравнения колебания струны. В данной работе рассматривается нагруженное уравнение гиперболического типа с двумя нагруженными слагаемыми. Следы нагрузок принадлежат разным характеристическим многообразиям одномерного волнового оператора. Объектом исследования является задача с данными на непересекающихся характеристиках. Доказаны существование и единственность поставленной задачи, а само решение выписано в явном виде. Отличительной особенностью рассматриваемой задачи является то, что при отсутствии нагруженных слагаемых она является некорректной.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, одномерный волновой оператор, характеристика, некорректная задача, формула Даламбера

Поступила 18.10.2024, одобрена после рецензирования 04.12.2024, принята к публикации 10.12.2024

Для цитирования. Аттаев А. Х. Задача с данными на параллельных характеристиках для нагруженного уравнения колебания струны // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2024. Т. 26. № 6. С. 13–18. DOI: 10.35330/1991-6639-2024-26-6-13-18

MSC: 35L02 Original article

Problem with data on parallel characteristics for the loaded wave equation

A.Kh. Attaev

Institute of Applied Mathematics and Automation –
branch of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
360000, Russia, Nalchik, 89 A Shortanov street

***Abstract*.** The theory of loaded equations is very relevant both in theoretical terms and in its numerous practical applications in various fields of modern natural science. This explains a huge number of works devoted to research and application of loaded equations in the last fifty years. The main objective of the study is to present the loaded equations as a method for setting new correct boundary value problems. The proof for the correctness of the problem is based on the d'Alembert's formula obtained for the studied wave equation. The paper considers a loaded hyperbolic equation with two loaded terms. The load traces are related to different characteristic manifolds of a one-dimensional wave operator. Our goal is to study the problem with data on non-intersecting characteristics. We prove the existence and uniqueness of the solution, which is presented in an explicit form. The distinguishing feature of the problem is that it is ill-posed in the absence of loaded terms.

Keywords: loaded equation, one-dimensional wave operator, characteristic, ill-posed problem, d'Alembert formula

Submitted 18.10.2024, approved after reviewing 04.12.2024, accepted for publication 10.12.2024

For citation. Attaev A.Kh. Problem with data on parallel characteristics for the loaded wave equation. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS.* 2024. Vol. 26. No. 6. Pp. 13–18 . DOI: 10.35330/1991-6639-2024-26-6-13-18

Введение

Основной теоретической базой математического моделирования систем с сосредоточенными и распределенными параметрами является так называемая общая теория граничных задач для обыкновенных и основных типов дифференциальных уравнений в частных производных. Термин «общая теория граничных задач», появившийся в начале 20-го столетия, включал в себя, исходя из современной терминологии, теорию локальных и нелокальных краевых задач как для обычных дифференциальных уравнений, так и для нагруженных. Впервые определение нагруженных уравнений было введено А. М. Нахушевым [1].

После выхода работы [1] появилось огромное количество публикаций, посвященных исследованию различных начально-краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Приведем лишь некоторые из них, которые в той или иной мере близки к тематике исследования данной работы, – [2–9]. Все это привело А. М. Нахушева к написанию монографии [10], посвященной основополагающим элементам теории нагруженных уравнений. В ней излагаются такие способы применения нагруженных уравнений, как метод математического моделирования нелокальных процессов и явлений и метод эффективного поиска приближенных решений дифференциальных уравнений.

В предлагаемой работе мы хотим продемонстрировать нагруженные уравнения как метод регуляризации некорректных задач для уравнений гиперболического типа. Решающими факторами, влияющими на результат исследования той или иной задачи для нагруженного дифференциального уравнения, являются: во-первых, взаимное расположение следа нагрузки и области, где ищется решение задачи; во-вторых, вид следообразующего отображения.

Пусть Ω – конечная односвязная область плоскости независимых переменных x и y, ограниченная характеристиками: $AC: x-y=0$, $AD: x+y=0$, $BC: x+y=1$, $BD: x-y=1$ оператора $Lu=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}$. В дальнейшем через J будем обозначать единичный интервал $(0,1)$.

В области Ω рассмотрим нагруженное уравнение

$$Lu = 4[\lambda u(x-y,0) + \mu u(x+y,0)], \quad (1)$$

где λ, μ – произвольные действительные константы.

В характеристических переменных $\xi = x-y$, $\eta = x+y$ уравнение (1) принимает вид

$$v_{\xi\eta} = \lambda v(\xi,\xi) + \mu v(\eta,\eta), \quad (2)$$

где $v(\xi,\eta) = u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\eta-\xi}{2}\right)$.

Очевидно, что нахождение общего решения (2) эквивалентным образом редуцируется к нахождению общего решения следующего нагруженного интегрального уравнения:

$$v(\xi,\eta) - \mu\xi \int_{\xi}^{\eta} v\,(t,t)dt + \lambda\eta \int_{\xi}^{\eta} v\,(t,t)dt = P(\xi,\eta),$$

где $P(\xi,\eta)$ является общим решением уравнения $P_{\xi\eta} = 0$.

Обращая полученное интегральное уравнение, получим

$$v(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta) + (\mu\xi - \lambda\eta) \int_{\xi}^{\eta} [f(t) + g(t)]\,dt. \tag{3}$$

Переходя к прежним переменным, получим

$$u(x,y) = f(x-y) + g(x+y) + \mu(x-y) \int_{x-y}^{x+y} [f(t) + g(t)]\,dt -$$

$$- \lambda(x+y) \int_{x-y}^{x+y} [f(t) + g(t)]\,dt. \tag{4}$$

Формулу (4) назовем аналогом формулы Даламбера для уравнения (1).

Определение 1. *Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию $u(x,y)$, представимую формулой (4), где f, g – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.*

Краевая задача для уравнения (1) с данными на непересекающихся характеристиках

Задача 1. *Найти регулярное для уравнения (1) решение $u(x,y) \in C^1(\bar{\Omega})$, удовлетворяющее условиям*

$$u|_{AD} = \varphi_1(x), \qquad u|_{BC} = \varphi_2(x), \qquad 0 \le x \le 1, \tag{5}$$

$\varphi_1, \varphi_2 \in C^1(\bar{J}) \cap C^3(J)$.

Теорема 1. *Пусть $\lambda \neq 0$,*

$$\varphi_2'^{(0)} - \varphi_1'^{(0)} = \lambda\varphi_1(0), \qquad \varphi_2'^{(1)} - \varphi_1'^{(1)} = \lambda\varphi_1(1), \tag{6}$$

$$\mu[\varphi_2(0) - \varphi_1(0) - \varphi_2(1) + \varphi_1(1)] = 0. \tag{7}$$

Тогда решение задачи 1 существует и единственно.

Доказательство. Пусть существует решение задачи 1. В характеристических переменных $\xi = x - y, \eta = x + y$ условия (5) примут вид

$$v(\xi,0) = \varphi_1(\xi), \qquad v(\xi,1) = \varphi_2(\xi), \qquad 0 \le \xi \le 1. \tag{8}$$

Удовлетворяя (3) условиям (8), получим

$$f(\xi) + g(0) + \mu\xi \int_{\xi}^{0} [f(t) + g(t)]\,dt = \varphi_1(\xi), \tag{9}$$

$$f(\xi) + g(1) + (\mu\xi - \lambda) \int_{\xi}^{1} [f(t) + g(t)]\,dt = \varphi_2(\xi). \tag{10}$$

Дифференцируя (9) и (10) по ξ и отнимая из (10) почленно выражение (9), получим

$$\mu\int_0^1 [f(t)+g(t)]\,dt+\lambda[f(\xi)+g(\xi)]=\varphi_2{}'(\xi)-\varphi_1{}'(\xi).$$

Учитывая, что $f(0)+g(0)=\varphi_1(0)$, из последнего соотношения получаем, что

$$f(\xi)+g(\xi)=\frac{1}{\lambda}[\varphi_2{}'(\xi)-\varphi_1{}'(\xi)]+c, \tag{11}$$

где $c=-\frac{\mu}{\lambda}[\varphi_2{}'(0)-\varphi_1{}'(0)-\lambda\varphi_1(0)]$.

Из (9) находим $f(\xi)$:

$$f(\xi)=\varphi_1(\xi)+\frac{\mu\xi}{\lambda}[\varphi_2(\xi)-\varphi_1(\xi)-\varphi_2(0)+\varphi_1(0)]+\mu\xi^2c-g(0).$$

Из (11) находим $g(\xi)$:

$$g(\xi)=\frac{1}{\lambda}[\varphi_2{}'(\xi)-\varphi_1{}'(\xi)]+c-\varphi_1(\xi)-$$

$$-\frac{\mu\xi}{\lambda}[\varphi_2(\xi)-\varphi_1(\xi)-\varphi_2(0)+\varphi_1(0)]-\mu\xi^2c+g(0).$$

Подставляя полученные значения для $f(\xi)$, $g(\xi)$, $f(\xi)+g(\xi)$ в (3), после некоторых преобразований, с учетом того, что значение для c принимаем равным нулю, получим

$$v(\xi,\eta)=\varphi_1(\xi)-\varphi_1(\eta)+\frac{1}{\lambda}[\varphi_2{}'(\eta)-\varphi_1{}'(\eta)]-$$

$$-\eta[\varphi_2(\eta)-\varphi_1(\eta)-\varphi_2(\xi)+\varphi_1(\xi)]+$$

$$+\frac{\mu}{\lambda}(\eta-\xi)[\varphi_2(0)-\varphi_1(0)-\varphi_2(\eta)+\varphi_1(\eta)]. \tag{12}$$

Или, переходя к переменным x, y, имеем

$$u(x,y)=\varphi_1(x-y)-\varphi_1(x+y)+\frac{1}{\lambda}[\varphi_2{}'(x+y)-\varphi_1{}'(x+y)]-$$

$$-(x+y)[\varphi_2(x+y)-\varphi_1(x+y)-\varphi_2(x-y)+\varphi_1(x-y)]+$$

$$+\frac{2\mu}{\lambda}y[\varphi_2(0)-\varphi_1(0)-\varphi_2(x+y)+\varphi_1(x+y)]. \tag{13}$$

Итак, доказано, что если существует решение задачи 1, то оно представимо в виде (13). Легко установить справедливость обратного утверждения. Принимая во внимание условие гладкости на заданные функции φ_1 и φ_2, непосредственной проверкой можно убедиться в том, что задаваемая формулой (13) функция $u(x,y)$, удовлетворяющая условиям (6), (7), является регулярным в области Ω решением уравнения (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А. М.* О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12. № 1. С. 103–108. EDN: PDBUJB

2. *Казиев В. М.* Задача Гурса для одного нагруженного интегро-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17. № 2. С. 313–319. https://www.mathnet.ru/rus/de4195

3. *Гогуноков З. Г.* Задача Гурса для нагруженного гиперболического уравнения второго порядка // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2000. Т. 5. № 1. С. 20–23.

4. *Огородников Е. М.* Некоторые характеристические задачи для систем нагруженных дифференциальных уравнений и их связь с нелокальными краевыми задачами // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Серия Физ.-мат. науки. 2003. Т. 19. С. 22–28. EDN: EBRVHH

5. *Аттаев А. Х.* Задача с данными на параллельных характеристиках для нагруженного волнового уравнения // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2013. Т. 15. № 2. С. 25–28. EDN: RWCJIL

6. *Ломов И. С.* Нагруженные дифференциальные операторы: сходимость спектральных разложений // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50. № 8. С. 1070–1079. DOI: 10.1134/S0374064114080068

7. *Аттаев А. Х.* Задача граничного управления для нагруженного уравнения колебания струны // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 5. С. 646–651. DOI: 10.1134/S0374064120050088

8. *Аттаев А. Х.* Характеристическая задача Коши для линейного нагруженного гиперболического уравнения // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2010. Т. 12. № 1. С. 9–10. EDN: OGYECJ

9. *Аттаев А. Х.* Краевые задачи с внутреннекраевым смещением для уравнения колебания струны // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2014. Т. 16. № 2. С. 17–19. EDN: SJTMNX

10. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с. ISBN: 978-5-02-037977-0

REFERENCES

1. Nakhushev A.M. The Darboux problem for a certain degenerate second order loaded integrodifferential equation. *Differential Equations*. 1976. Vol. 12. No. 1. Pp. 103–108. EDN: PDBUJB. (In Russian)

2. Kaziev V.M. Gursa problem for one loaded integro-differential equation. *Differential Equations*. 1981. Vol. 17. No. 2. Pp. 313–319. http://mi.mathnet.ru/de4195. (In Russian)

3. Gogunokov Z.G. The Gursa problem for a loaded second-order hyperbolic equation. *Reports of the Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences*. 2000. Vol. 5. No. 1. Pp. 20–23. (In Russian)

4. Ogorodnikov E.M. Some characteristic problems for loaded systems of differential equations and their relationship with non-local boundary value problems. *J. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys. math. Sci*. 2003. Vol. 19. Pp. 22–28. EDN: EBRVHH. (In Russian)

5. Attaev A.Kh. Problem with data on parallel characteristics for a loaded wave equation. *Reports of the Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences*. 2013. Vol. 15. No. 2. Pp. 25–27. EDN: RWCJIL. (In Russian)

6. Lomov I.S. Loaded differential operators: Convergence of spectral expansions. *Differential Equations*. 2014. Vol. 50. No. 8. Pp. 1070–1079. DOI: 10.1134/S0374064114080068. (In Russian)

7. Attaev A.K. Boundary control problem for a loaded string vibration equation. *Differential Equations*. 2020. Vol. 56. No. 5. Pp. 635–640. DOI: 10.1134/S0374064120050088. (In Russian)

8. Attaev A.Kh. Characteristic Cauchy problem for a linear loaded hyperbolic equation. *Reports of the Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences*. 2010. Vol. 12. No. 1. Pp. 9–10. EDN: OGYECJ. (In Russian)

9. Attaev A.Kh. Boundary value problems with inner shift for the string equation. *Reports of the Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences*. 2014. Vol. 16. No. 2. Pp. 17–19. EDN: SJTMNX. (In Russian)

10. Nakhushev A.M. *Nagruzhennyye uravneniya i ikh primeneniye* [Loaded equations and their applications]. Moscow: Nauka, 2012. 232 p. ISBN: 978-5-02-037977-0. (In Russian)

Финансирование. Исследование проведено без спонсорской поддержки.

Funding. The study was performed without external funding.

Информация об авторе

Аттаев Анатолий Хусеевич, к.ф.-м.н., доцент, зав. отд., вед. науч. сотр. отдела уравнений смешанного типа, Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук;

360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А;

attaev.anatoly@yandex.ru, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5864-6283, SPIN-код: 6389-3114

Information about the author

Anatoly Kh. Attaev, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of Department, Leading Researcher of the Department of Mixed-Type Equations, the Institute of Applied Mathematics and Automation of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences;

360000, Russia, Nalchik, 89 A Shortanov street;

attaev.anatoly@yandex.ru, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5864-6283, SPIN-code: 6389-3114