

УДК 519.1:519.853.4:004.94

Научная статья

DOI: 10.35330/1991-6639-2024-26-6-82-97

EDN: DIYRVK

## Компьютерное проектирование больших разветвленных трубопроводных систем водоснабжения высокого ранга оптимальности

М. Б. Абазоков<sup>✉</sup>, В. Ч. Кудаев

Институт прикладной математики и автоматизации –  
филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук  
360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

**Аннотация.** Задача проектирования оптимальных трубопроводных гидравлических систем регионального и межрегионального водоснабжения в настоящее время исключительно актуальна в связи с недостатком водных ресурсов в части регионов России. Для существенно многоэкстремальных задач оптимизации, к которым относится данная задача, локальный экстремум не информативен, а глобальный практически недостижим за экономически оправданное время решения задачи на компьютере. Целью исследования является разработка метода, алгоритмов и программной системы компьютерного проектирования больших разветвленных трубопроводных систем водоснабжения высокого ранга оптимальности. Основа метода состоит в разделении решения задачи синтеза системы, содержащей потоковые и потенциальные переменные (т.е. являющейся сетью Кирхгофа), на две фазы, что существенно снижает ее размерность. На первой фазе определяется структура, на второй – значения гидравлических параметров сети. Разработанные метод, алгоритм и программная система предназначены для компьютерного проектирования разветвленных трубопроводных систем регионального и межрегионального водоснабжения, а также больших трубопроводных оросительных систем.

**Ключевые слова:** трубопроводная разветвленная гидравлическая сеть Кирхгофа, компьютерное проектирование, ранговая оптимизация сети, снижение размерности задачи, формула Дарси-Вейсбаха, затраты на трубопроводы, энергетические затраты, насосная станция

Поступила 05.10.2024, одобрена после рецензирования 25.11.2024, принята к публикации 28.11.2024

**Для цитирования.** Абазоков М. Б., Кудаев В. Ч. Компьютерное проектирование больших разветвленных трубопроводных систем водоснабжения высокого ранга оптимальности // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2024. Т. 26. № 6. С. 82–97. DOI: 10.35330/1991-6639-2024-26-6-82-97

MSC: 90C26

Original article

## Computer modelling of large branched water pipeline systems with higher-order optimality

M.B. Abazokov<sup>✉</sup>, V.Ch. Kudaev

Institute of Applied Mathematics and Automation –  
branch of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences  
360000, Russia, Nalchik, 89 A Shortanov street

**Abstract.** Modelling of optimal hydraulic pipeline for regional and interregional water supply systems is highly relevant because of water scarcity in some parts of Russia. For a multi-extreme optimization problem to which this problem relates a local extremum is not sufficient and an absolute extremum is not possible since it would take a massive amount of computing power to solve. The purpose of the research

is to develop a method, algorithms and software system for computer modelling of large branched water pipeline systems with higher-order optimality. The basis of the method is to divide the synthesis problem with flux and potential variables (Kirchhoff's circuit) into two phases; it allows us to significantly reduce the computation time and resource requirements. The first phase determines the network structure while the second one identifies values of hydraulic parameters. The proposed methodology, algorithm and software are designed for computer modelling of branched water pipelines systems of regional and interregional water supply as well as for large-scale irrigation systems.

**Keywords:** branched hydraulic pipeline Kirchhoff's circuit, computer modelling, rank optimization, dimensionality reduction, Darcy–Weisbach equation, pipeline costs, energy costs, pump station

Submitted 05.10.2024,

approved after reviewing 25.11.2024,

accepted for publication 28.11.2024

**For citation.** Abazokov M.B., Kudaev V.Ch. Computer modelling of large branched water pipeline systems with higher-order optimality. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS.* 2024. Vol. 26. No. 6. Pp. 82–97. DOI: 10.35330/1991-6639-2024-26-6-82-97

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время одной из актуальных является проблема снижения дефицита воды в части регионов России. Поэтому метод решения проблемы должен быть ориентирован на создание больших трубопроводных сетей регионального и межрегионального водоснабжения.

Снижение затрат на создание таких сетей является важной задачей, которая может быть решена только на основе математического моделирования и компьютерного проектирования. Недостатком существующих методов решения этой задачи является то, что задача ставится и решается как чисто потоковая. В работах Сибирского энергетического института [1] эта задача решалась уже как потоковая задача Кирхгофа, т.е. с учетом потоковых и потенциальных переменных.

Метод решения, предложенный в [1], модифицирован в данной работе. Модификация метода состоит в разделении процесса оптимизации на две фазы: на первой фазе определяется структура, на второй – значения потенциальных переменных. Разделение процесса оптимизации на две фазы существенно снижает размерность задачи и время ее решения на компьютере. На этой основе разработана компьютерная система проектирования разветвленных трубопроводных сетей водоснабжения высокого ранга оптимальности.

### 1. ЗАДАЧА СИНТЕЗА ТРУБОПРОВОДНОЙ ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ СЕТИ

Пусть  $\Gamma(B, D)$  – заданный избыточный граф возможных соединений вершин сети;  $B$  – множество вершин графа;  $D$  – множество дуг графа.

Общая постановка задачи синтеза трубопроводной гидравлической сети состоит в следующем:

$$Z(x, h) = \frac{\rho H_{\text{НС}} Q_{\text{НС}} T}{\eta} + \sum_{(ij) \in D} c_{ij}(x_{ij}, h_{ij}) l_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\sum_{i \in D_j^+} x_{ij} - \sum_{k \in D_j^-} x_{jk} = g_j, \quad \forall j \neq 1 \in B, \quad (2)$$

$$\sum_{j \in D_j^-} x_{1j} = Q_{\text{НС}}, \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in D \quad (4)$$

$$H_{HC_i} = H_i + z_i - z_{HC} + \sum_{(rs) \in T_i} h_{rs} l_{rs} \quad (5)$$

$$H_{HC} = \max_i \{H_{HC_i}\}, \quad (6)$$

где  $Z(x, h)$  – общие затраты на сеть;  $\rho$  – цена в рублях за 1 кВт·ч;  $H_{HC}$  – напор на насосной станции;  $Q_{HC}$  – общий поток в сеть;  $T$  – заданное время эксплуатации сети в часах;  $\eta$  – коэффициент полезного действия (КПД);  $i$  – номер вершины истока,  $j$  – номер вершины стока ( $ij$ )-й ветви;  $x_{ij}$  – поток по ветви;  $h_{ij}$  – удельные потери напора по ветви;  $l_{ij}$  – длина ветви;  $c_{ij}(x_{ij}, h_{ij})$  – удельная стоимость ветви, которая вычисляется по формуле:

$$c_{ij}(x_{ij}, h_{ij}) = a + b d_{ij}^\alpha,$$

где  $b$  – цена за 1 метр трубы диаметром 1 метр;  $d_{ij}$  – диаметр трубы по ветви.

Для различных материалов труб коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $k$  определяются из табл. 1 (таблица сформирована нами на основе сведений из [2]).

**Таблица 1.** Значения гидравлических параметров труб из различных материалов

**Table 1.** Values of hydraulic parameters of pipes made of different materials

Материал труб	Коэффициенты			
	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$k$
Сталь	1,4	2	5,3	0,001735
Чугун	1,6	2	5,3	0,001735
Асбестоцемент	1,95	1,85	4,89	0,001180
<b>Пластмасса</b>	<b>1,95</b>	<b>1,774</b>	<b>4,774</b>	<b>0,001052</b>

Представим таблицу полиэтиленовых труб, активно использующихся при проектировании больших разветвленных трубопроводных гидравлических сетей<sup>1</sup>.

Исходя из табл. 2 были определены следующие значения коэффициентов  $a$ ,  $b$ :

$$a = 0, b = 17400 \text{ (руб.)}.$$

Диаметр труб вычисляется по формуле Дарси–Вейсбаха:

$$d_{ij} = \left( \frac{k x_{ij}^\beta}{h_{ij}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

$D_j^+$  – множество дуг, входящих в узел  $j$ ;  $D_j^-$  – множество дуг, исходящих из узла  $j$ ;  $g_j$  – заданный расход потока в  $j$ -м узле сети; источником является вершина под номером 1;  $H_i$  – нормативный напор в  $i$ -й вершине;  $z_i$  – высота  $i$ -й вершины;  $z_{HC}$  – высота вершины, в которой находится насосная станция;  $T_i$  – траектория, состоящая из ветвей, ведущих из источника в  $i$ -ю вершину;  $(rs)$  – ветви сети, находящиеся на траектории  $T_i$ ;  $\sum_{(rs) \in T_i} h_{rs} l_{rs}$  – полные потери напора по траектории, ведущей из источника в  $i$ -ю вершину;  $H_{HC_i}$  – необходимый напор на насосной станции, обеспечивающий  $i$ -ю вершину ее заданным нормативным напором.

<sup>1</sup>ГОСТ 18599-2001 Трубы водопроводные напорные ПЭ 100. ООО «ПСТ ЮГ»

**Таблица 2.** Трубы водопроводные напорные ПЭ 100**Table 2.** Pressure water pipes PE 100

Диаметры труб (мм)	Цена (руб.)
50	46,20
63	73,20
75	100,20
90	145,35
110	213,00
125	274,50
140	346,50
160	454,50
180	567,00
200	702,00
225	882,00
250	1093,50
280	1363,50
315	1740,00
355	2190,00
400	2790,00
450	3525,00
500	4350,00
560	5445,00
630	6900,00
710	8775,00
800	11115,00
900	14070,00
1000	17400,00
1200	25050,00

Функция  $c_{ij}(x_{ij}, h_{ij})$  для  $\forall(i, j) \in D$  является гладкой и строго вогнутой по  $x_{ij}$  и выпуклой по  $h_{ij}$ . Вследствие вогнутости функции по  $x_{ij}$  задача (1)–(6) является существенно многоэкстремальной. Ввиду высокой сложности задачи (1)–(6) сначала решается более простая, потоковая задача и уже на основе ее решения находится решение общей задачи.

## 2. ЗАДАЧА СИНТЕЗА РАЗВЕТВЛЕННОЙ ПОТОКОВОЙ СЕТИ

Задача синтеза разветвленной потоковой сети состоит в следующем:

$$Z(x) = \sum_{ij \in D} c_{ij}(x_{ij})l_{ij} \rightarrow \min, \quad (7)$$

$$\sum_{i \in D_j^+} x_{ij} - \sum_{k \in D_j^-} x_{jk} = g_j, \quad \forall j \neq 1 \in B, \quad (8)$$

$$\sum_{j \in D_j^-} x_{1j} = Q, \quad (9)$$

$$x_{ij} \geq 0, \forall(i, j) \in D, \quad (10)$$

где  $\Gamma(B, D)$  – заданный избыточный граф возможных соединений вершин сети;  $B$  – множество вершин графа;  $D$  – множество дуг графа;  $Z(x)$  – затраты на потоковую сеть;  $x_{ij}$  и  $l_{ij}$  – значения величины потока и длина  $(i, j)$ -й дуги;  $c_{ij}(x_{ij})$  – заданная функция удельной

стоимости;  $Q$  – заданный поток в сеть;  $g_j$  – заданный расход потока в  $j$ -м узле сети.  $D_j^+$  – множество дуг, входящих в узел  $j$ ;  $D_j^-$  – множество дуг, исходящих из узла  $j$ .

Функция  $c_{ij}(x_{ij})$  для  $\forall(i, j) \in D$  является гладкой и строго вогнутой. Поэтому задача (7)–(10) является существенно многоэкстремальной, т.к. локальные экстремумы задачи (7)–(10), вообще говоря, достигаются во всех вершинах транспортного многогранника (8)–(10), а глобальный в одной из них.

## 2.1. СУЩЕСТВУЮЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПОТОКОВОЙ ЗАДАЧИ И ИХ НЕДОСТАТКИ

Недостатки существующих методов [3–5] рассмотрены в монографии [1, с. 114–123]. Основным недостатком состоит в том, что уже при  $n > 80$  (где  $n$  – количество узлов сети) существующие методы поиска глобального минимума не срабатывают.

**Метод погружения** решения задачи минимизации вогнутой функции на выпуклом многограннике изложен в работе [6]. В работах [3–4] данный метод модифицирован для решения задачи синтеза потоковой сети с целевой функцией (7) на транспортном многограннике (8)–(10).

**Метод ветвей и границ**, представленный в работе [5], основан на последовательном делении множества допустимых решений с отбрасыванием подмножеств, имеющих высокую нижнюю оценку минимизируемой функции. Теоретически это обеспечивает получение глобального минимума, но с заданной допустимой погрешностью.

Также следует отметить работу авторов Е. Р. Ставровского и Р. А. Трунова «Новые задачи и компьютерные программы оптимизации конфигурации и параметров региональных газораспределительных сетей при их проектировании» (см. [7, с. 97–108]).

## 2.2. МЕТОД РАНГОВОЙ ОПТИМИЗАЦИИ РАЗВЕТВЛЕННОЙ ПОТОКОВОЙ СЕТИ

Для существенно многоэкстремальных задач большой размерности локальный экстремум не информативен, а глобальный, вообще говоря, недостижим за экономически оправданное время решения задачи на компьютере. Поэтому в наших работах [8–12] было введено и использовано понятие ранга экстремума решения задачи синтеза потоковой сети.

**Определение 1.** Точкой экстремума  $P$ -го ранга задачи (7)–(10) назовем такую угловую точку  $\{x_{ij}^*\}_{ij \in D}$  транспортного многогранника (8)–(10), которая является точкой глобального минимума на выпуклой линейной комбинации вершин многогранника  $P$ -достижимых из этой точки.

Как известно, любой точке (вершине) транспортного многогранника соответствует базисное решение. Переведем определение 1 на язык теории сетей.

**Определение 2.**  $P$ -фрагментом сети назовем замыкаемые любыми  $P$  хордами графа  $\Gamma(B, D)$   $P$  контуров на текущем остовном дереве  $T$  графа  $\Gamma(B, D)$ .

**Теорема (условие ранговой оптимальности для сетевой задачи).**

1) Отличные от нуля компоненты потокораспределения  $\{x_{ij}^*\}_{ij \in D}$  сети  $P$ -го ранга выделяют на графе  $\Gamma(B, D)$  ориентированное остовное дерево с корнем в источнике сети.

2) Экстремум  $P$ -го ранга является глобальным на выпуклой линейной комбинации вершин транспортного многогранника, имеющих смежность в промежутке  $[1, P]$  к точке экстремума.

3) Для того чтобы решение  $\{x_{ij}^*\}_{ij \in D}$ , где  $x_{ij} = 0 \forall(i, j) \notin T$ , задачи (7)–(10) было экстремумом  $P$ -го ранга, необходимо и достаточно, чтобы оно было оптимально по всем фрагментам  $P$ -го ранга на  $T$ , т.е.

$$\sum_{(i,j) \in \Phi_{T,P}} c_{ij}(x_{ij}^*) l_{ij} \leq \sum_{(i,j) \in D} c_{ij}(x_{ij}) l_{ij},$$

где  $\{x_{ij}\}_{ij \in D}$  – любое допустимое решение задачи, но такое, что  $x_{ij} = x_{ij}^* \forall (i, j) \notin \Phi_{T,P}$ .

Доказательство теоремы приведено в работе [13].

Отметим, что условие ранговой оптимальности является конкретизацией системного принципа оптимальности: «Любая часть оптимальной системы оптимальна (при фиксации граничных условий с остальной сетью)».

Метод ранговой оптимизации сетевых систем, представленный в наших работах [8–13], состоит в сведении оптимизации сети к оптимизации ее фрагментов все более высокого ранга. При этом рассмотрение только связанных  $P$ -фрагментов существенно снижает размерность задачи.

**Суть метода ранговой оптимизации разветвленной потоковой сети** состоит в следующем.

При оптимизации 1-го ранга на очередной итерации выделяется очередная хорда  $(i, j)$  и соответствующий ей фрагмент 1-го ранга (контур сети) на  $T$ . Из фрагмента удаляется дуга, встречная хорде. Проведя оптимизацию полученного фрагмента, определяем очередную независимую переменную относительно полученного решения и переходим к оптимизации соответствующего фрагмента. Процесс оптимизации 1-го ранга системы завершается при получении решения, которое не может быть улучшено внесением в оптимизируемое текущее остовное дерево любой из его хорд и соответствующим изменением потоков по образованному при этом контуру.

Далее переходим к оптимизации 2-го ранга. Для этого выделяем на каждой очередной итерации очередную пару хорд и соответствующие им фрагменты 1-го ранга. В том случае, когда эти фрагменты пересекаются, формируем фрагмент 2-го ранга – объединение двух фрагментов 1-го ранга. Решаем задачу оптимизации фрагмента 2-го ранга и переходим к следующей итерации.

Оптимизация системы прекращается при достижении заданного оптимума  $P$ -го ранга либо заданного времени решения задачи на компьютере. *При этом, если фрагменты  $P$ -го ранга не пересекаются, программная система их не рассматривает, т.к. их оптимизация уже была проведена при построении сети  $(P-1)$ -го ранга. Это резко снижает размерность задачи синтеза сети. Таким образом, метод ранговой оптимизации сетевых систем состоит в сведении оптимизации сети к оптимизации только ее связанных фрагментов  $P$ -го ранга.*

### 3. РАЗБИЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА РАЗВЕТВЛЕННОЙ ПОТОКОВОЙ СЕТИ НА ДВЕ ФАЗЫ И ТЕОРЕМА О СОГЛАСОВАНИИ ФАЗ РЕШЕНИЯ

#### 3.1. МЕТОД А. П. МЕРЕНКОВА, В. Я. ХАСИЛЕВА, О. А. НЕКРАСОВОЙ

В работе [1] изложены методы оптимального проектирования разветвленных трубопроводных сетей, разработанные в Сибирском энергетическом институте (г. Иркутск). Основу методов составили работы А. П. Меренкова, В. Я. Хасилева и О. А. Некрасовой [14, 2]. В основе метода Меренкова–Хасилева–Некрасовой (метод МХН) лежит зависимость стоимости каждой  $i$ -й ветви сети от диаметра трубы на ней, стоимостных коэффициентов  $a$  и  $b$  и гидравлического коэффициента  $0 < \alpha \leq 2$ .

$$c_i = a + bd_i^\alpha, \quad (11)$$

где  $a$ ,  $b$  и  $\alpha$  зависят от материала труб.

На основе формулы типа Дарси–Вейсбаха  $h_i = \frac{kx_i^\beta}{d_i^\gamma}$  получим

$$d_i = \left( \frac{kx_i^\beta}{h_i} \right)^{1/\gamma}. \quad (12)$$

Из (11), (12) и с учетом того, что  $a = 0$ , получим

$$c_i = bk^{\frac{\alpha}{\gamma}} x_i^{\frac{\alpha\beta}{\gamma}} h_i^{-\frac{\alpha}{\gamma}}.$$

В методе МХН решается задача минимизации капитальных затрат  $Z(x, h)$  на сеть при заданных энергетических затратах  $\Xi$  и общего потока в сеть  $Q$  от источника:

$$Z(x, h) = \sum_{i=1}^n \left( bk^{\frac{\alpha}{\gamma}} x_i^{\frac{\alpha\beta}{\gamma}} h_i^{-\frac{\alpha}{\gamma}} \right) l_i \rightarrow \min, \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i h_i l_i = \Xi, \quad (14)$$

$$Ax = Q, \quad (15)$$

где  $A$  – заданная матрица возможных соединений узлов сети друг с другом,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  – вектор потоков;  $x_i, h_i$  – неизвестный поток и удельная потеря напора по  $i$ -й ветви матрицы;  $\alpha, \beta, \gamma$  – гидравлические параметры, зависящие от материала труб сети;  $b, k$  – заданные коэффициенты;  $l_i$  – длина  $i$ -й ветви сети.

Значения гидравлических и стоимостных данных по трубам из различных материалов представлены в табл. 1, сформированной нами на основе методов определения потерь напора в водопроводных трубах [2, с. 54–55].

Снизить размерность задачи (13)–(15) позволяет разделение решения задачи оптимального проектирования на две фазы: на первой фазе решается задача трассировки сети (определение потоков по ветвям сети), на второй фазе – задача (13)–(15) при известных потоках.

### 3.2. МЕТОД ТРАССИРОВКИ СЕТИ (1-Я ФАЗА)

Общие затраты (капитальные и энергетические) на всю сеть будем оценивать функцией

$$F(x, h) = \sum_i^n \left( bk^{\frac{\alpha}{\gamma}} x_i^{\frac{\alpha\beta}{\gamma}} h_i^{-\frac{\alpha}{\gamma}} + px_i h_i \right) l_i. \quad (16)$$

Поскольку функция затрат (16) строго выпуклая и гладкая по  $h_i$ , то находим производную по  $h_i$ , приравниваем ее к нулю, находим значения  $h_i$ , подставляем в (16) и после ряда преобразований получим

$$F(x) = \left( \left( \frac{\gamma}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} + \left( \frac{\alpha}{\gamma} \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \right) b^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} (pk)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} \sum_i x_i^{\frac{\alpha\beta+\alpha}{\alpha+\gamma}} l_i.$$

Введя обозначения

$$\eta = \left( \left( \frac{\gamma}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}} + \left( \frac{\alpha}{\gamma} \right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \right) b^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} (pk)^{\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}}, \quad \delta = \frac{\alpha\beta+\alpha}{\alpha+\gamma},$$

окончательно получим

$$F(x) = \eta \sum_i x_i^{\delta} l_i. \quad (17)$$

Величины  $\eta$  и  $\delta$  зависят только от материала труб, используемых для создания сети и не зависят от потоков. **Таким образом, приходим к чисто потоковой задаче, поскольку  $\eta$  и  $\delta$  являются константами на заданном сортаменте труб.**

Поскольку же  $0 < \delta < 1$ , то есть потоковая функция  $x_i^{\delta}$  строго вогнута по потоку  $x_i$ . Вследствие этого локальные и глобальные экстремумы функции затрат (17) следует ис-

катель только на остовных деревьях заданного избыточного графа возможных соединений узлов сети друг с другом.

### 3.3. МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ РАЗВЕТВЛЕННОЙ ТРУБОПРОВОДНОЙ ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ СЕТИ ПРИ ЗАДАННЫХ ПОТОКАХ (2-я ФАЗА)

При найденных в ходе решения задачи трассировки потоках  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$  задача (13)–(15) переходит в задачу:

$$\begin{cases} Z(h) = \sum_{i=1}^n \left( b k^{\frac{\alpha}{\gamma}} x_i^* \frac{\alpha\beta}{\gamma} h_i^{-\frac{\alpha}{\gamma}} \right) l_i \rightarrow \min, \\ \sum_{i=1}^n x_i^* h_i l_i = \exists. \end{cases}$$

Решая ее методом Лагранжа, получим

$$h_i = \frac{\frac{\alpha\beta-\gamma}{\exists x_i^* \frac{\alpha\beta}{\alpha+\gamma}}}{\sum_{j=1}^n x_j^* \frac{\alpha\beta+\alpha}{\alpha+\gamma} l_j}$$

для любого  $i = j, x_i^* = x_j^*$ .

Поскольку значения  $x_i^*, i = \overline{1, n}$  известны, то, вычислив сумму в знаменателе дроби и обозначив ее  $M$

$$M = \sum_{j=1}^n x_j^* \frac{\alpha\beta+\alpha}{\alpha+\gamma} l_j,$$

определим  $h_i^*$

$$h_i^* = \frac{\frac{\alpha\beta-\gamma}{\exists x_i^* \frac{\alpha\beta}{\alpha+\gamma}}}{M}, i = \overline{1, n}$$

Подставив найденные значения  $h_i^*$  и  $x_i^*$  в (12), получим диаметры  $d_i$ , а подставляя  $d_i$  в (11), получим удельную стоимость трубопроводов водопроводной сети.

#### **Теорема (о коммутации фаз решения задачи синтеза потоковой сети).**

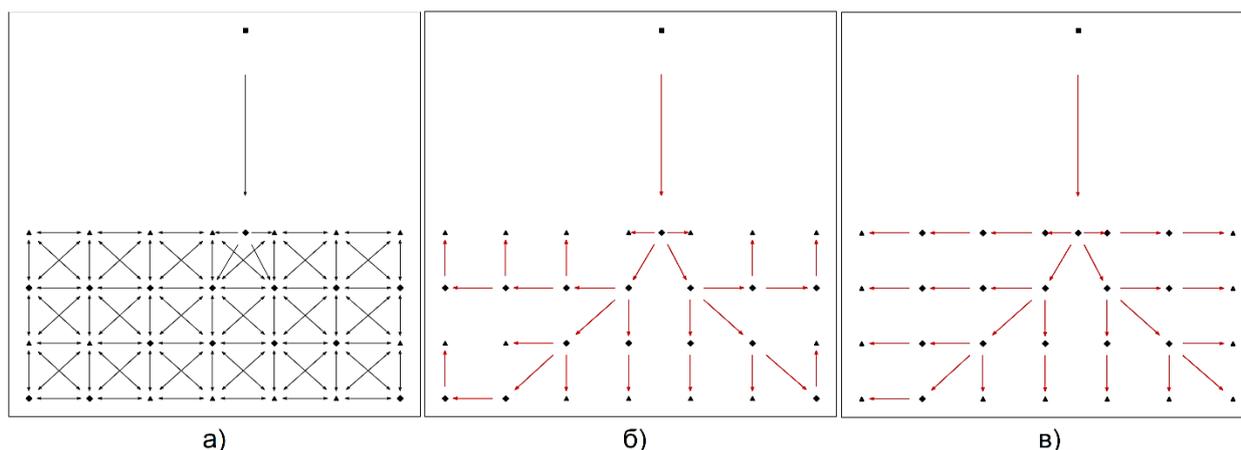
С ростом ранга оптимальности решения задачи трассировки (1-я фаза) уменьшаются и затраты на создание гидравлической трубопроводной сети при заданных фиксированных энергетических затратах (2-я фаза), т.е. если  $Z_{\Phi_1}^P$  и  $Z_{\Phi_1}^{P+1}$  – соответственно оценки затрат на создание сетей  $P$ -го и  $(P + 1)$ -го рангов оптимальности на первой фазе оптимизации,  $Z_{\Phi_2}^P$  и  $Z_{\Phi_2}^{P+1}$  – оценки затрат на второй фазе,  $x_i^*, x_i^{**}, i = \overline{1, n}$  – потоки на сети  $i$ -го и  $(P + 1)$ -го рангов, тогда

$$\frac{Z_{\Phi_1}^{P+1}(x^{**})}{Z_{\Phi_1}^P(x^*)} = r < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{Z_{\Phi_2}^{P+1}(x^{**})}{Z_{\Phi_2}^P(x^*)} = r^{\frac{\alpha}{\gamma}+1} < 1.$$

Доказательство этой теоремы приведено в нашей работе [11].

### 4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ОПТИМИЗАЦИИ СТРУКТУРЫ (1-я ФАЗА)

Был проведен вычислительный эксперимент на плотном базовом графе (см. рис. 1а). За основу взята одна из подсетей крупнейшей на Юге России (Ставропольский край) Лего-Егорлыкской трубопроводной оросительной системы. Была запущена 5-оптимизация с остовного дерева сети со структурой, приведенной на рис. 1б.



**Рис. 1.** Базовый граф, структура начального остоного дерева, структура 5-оптимальной сети  
**Fig. 1.** Basic graph, structure of the initial spanning tree, structure of the 5-optimal network

В процессе 5-оптимизации структура исходной сети была преобразована в структуру, приведенную на рис. 1в. Краткая информация по оптимизации представлена в табл. 3.

**Таблица 3.** Информация по оптимизации

**Table 3.** Optimization information

Показатель	Начало	Конец
Структура	Рис. 1б	Рис. 1в
Время	13:55	22:23
Стоимость (потоковая)	9093,770 у.е.	8643,053 у.е.
Процент оптимизации	≈ 4,96 %	

Дальнейшая оптимизация потерь напора, диаметров труб и общей стоимости сети будет проводиться на структуре, приведенной на рис. 1в, что следует из теоремы о коммутации фаз решения задачи синтеза потоковой сети.

### 5. СУТЬ АЛГОРИТМА ОПТИМИЗАЦИИ ОБЩЕЙ СТОИМОСТИ СЕТИ

После того как структура определена и потоки по ней известны, переходим к оптимизации потерь напора, диаметров труб и общей стоимости сети (т.е. затрат на создание и эксплуатацию сети).

Для начала следует найти начальное значение энергии, которое будет затрачиваться на работу сети («Алгоритм подсчета начальной энергии»). Далее находится такой напор на насосной станции (НС), который сможет обеспечить каждый узел сети требуемым напором воды («Алгоритм подсчета напора на насосной станции»). Далее находится общая стоимость всей сети с учетом энергии, напора на НС, времени работы, КПД НС, длин и стоимости каждой ветви сети, зависящей от диаметров труб, которые, в свою очередь, зависят от напоров и потока на каждой ветви сети («Алгоритм подсчета полных затрат»).

Однако данная общая стоимость сети, являющаяся оптимальной по затратам на трубы, не является оптимальной по энергетическим затратам. Поэтому для решения задачи (1)–(6) следует постепенно снижать значение энергии (например, на 1 %) и высчитывать общую стоимость сети до тех пор, пока снижается общая стоимость всей сети («Алгоритм оптимизации полных затрат на сеть»).

Далее приведены все указанные алгоритмы.

## 6. АЛГОРИТМЫ

## 6.1. ВВОДНЫЕ ДАННЫЕ

Задана структура (дерево) сети, т. е. заданы:

- вершины дерева (соответственно их координаты и потребление в них, а также нормативный напор, т.е. это тот напор, который нужно предоставить/поставить в каждую вершину);
- дуги дерева (а значит, уже посчитаны потоки по трубам).

Насосная станция ставится в вершине-источнике.

6.2. АЛГОРИТМ ПОДСЧЕТА НАЧАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ( $\Xi_0$ )

1) Считаем удельные потери напора  $h_i$  по каждой ветви дерева по формуле

$$h_i = \left(\frac{\alpha b}{\gamma p}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}} \frac{\alpha}{k^{\alpha+\gamma} x_i^{\alpha+\gamma}} \frac{\alpha\beta-\gamma}{\alpha+\gamma},$$

где  $b = 17400$  – цена в рублях за 1 метр трубы диаметра 1 метр;  $p = 5,68$  – цена за 1 киловатт-час;  $i$  – номер ветви;  $x_i$  – поток по ветви;  $\alpha, \beta, \gamma, k$  – коэффициенты из табл. 1.

2) Считаем начальную энергию  $\Xi_0$  по формуле

$$\Xi_0 = \sum_{i=0}^n x_i h_i l_i,$$

где  $i$  – номер ветви дерева;  $x_i$  – поток по ветви;  $l_i$  – длина ветви;  $h_i$  – удельные потери напора по ветви.

6.3. АЛГОРИТМ ПОДСЧЕТА НАПОРА НА НАСОСНОЙ СТАНЦИИ ( $H_{НС}$ )

1) Вычисляем величину  $M$  по формуле

$$M = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\alpha(\beta+1)}{\alpha+\gamma} l_i$$

2) Для каждой ветви  $j$  вычисляется  $h_j$  (удельная потеря напора по  $j$ -й ветви) по формуле

$$h_j = \frac{\Xi_0 x_j^{\frac{\alpha\beta-\gamma}{\alpha+\gamma}}}{M}.$$

3) Для каждой вершины  $i$  находим  $T_i$  – траекторию из веток, ведущую из источника в  $i$ -ю вершину.

4) Для каждой вершины  $i$  находим  $H_{НСi}$  (т.е. напор на насосной станции, который требуется для обеспечения этой вершины  $i$  требуемым ей напором) по формуле

$$H_{НСi} = H_i + z_i - z_{НС} + \sum_{j \in T_i} h_j l_j,$$

где  $H_i$  – нормативный напор в  $i$ -й вершине,  $z_i$  – высота  $i$ -й вершины,  $z_{НС}$  – высота насосной станции (точнее высота вершины, где находится насосная станция),  $\sum_{j \in T_i} h_j l_j$  – полные потери напора по  $j$ -й дуге,  $j$  – номер дуг дерева (ветви).

5) Находим  $H_{НС}$  как максимум из всех  $H_{НСi}$ , т. е.

$$H_{НС} = \max_i \{H_{НСi}\}.$$

6.4. АЛГОРИТМ ПОДСЧЕТА ПОЛНЫХ ЗАТРАТ ( $Z_0$ )

Найти  $Z_0$  ( $Z_0$  – полные затраты на сеть).

$$Z_0 = Z_{\text{энергетические}} + Z_{\text{труб}},$$

$$Z_{\text{энергетические}} = \frac{\rho H_{НС} Q_{НС} T}{\eta},$$

где  $Z_{\text{энергетические}}$  – энергетические затраты на эксплуатацию сети в рублях;

$\rho = 5,68$  – это цена за 1 киловатт-час;  $H_{\text{НС}}$  – напор на насосной станции;  $Q_{\text{НС}}$  – общий поток в сеть (его можно найти как сумму потреблений во всех вершинах или сумму потоков всех ветвей, выходящих из вершины-источника);  $T = 365 * 24 = 8670$  ч. – время эксплуатации сети в часах;  $\eta = 0,7(70\%)$  – коэффициент полезного действия.

$$Z_{\text{труб}} = \sum_{i=1}^n c_i l_i,$$

где  $Z_{\text{труб}}$  – затраты на трубы в рублях;  $i$  – номер ветви;  $l_i$  – длина  $i$ -й ветви;  $c_i$  – удельная цена  $i$ -й ветви. Вычисляется она так:

$$c_i = b d_i^\alpha,$$

где  $b = 17400$  – цена за 1 метр трубы диаметра 1 метр;  $d_i$  – диаметр  $i$ -й ветви. Вычисляется диаметр по формуле Дарси–Вейсбаха:

$$d_i = \left( \frac{k x_i^\beta}{h_i} \right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

где  $\beta, \gamma, k$  – это коэффициенты из табл. 1 (для пластмассы);  $x_i$  – поток по ветви;  $h_i$  – удельные потери напора по ветви.

#### 6.5. АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ ПОЛНЫХ ЗАТРАТ НА СЕТЬ

1. Находится  $\mathcal{E}_0$  и  $Z_0$ .
2. Уменьшается  $\mathcal{E}_0$  на 1 %, и это значение присваивается в  $\mathcal{E}_1$ , т.е.  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 * 0,99$ .
3. Находится  $Z_1$  по двум последним алгоритмам («Алгоритм подсчета напора на насосной станции» и «Алгоритм подсчета полных затрат»), только вместо  $\mathcal{E}_0$  используется  $\mathcal{E}_1$ .
4. Переменной  $i$  присваивается значение 1.
5. Пока  $Z_{i-1} > Z_i$ , выполняются следующие операции:
  - 5.1. Увеличивается  $i$  на единицу.
  - 5.2.  $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{i-1} * 0,99$ .
  - 5.3. Находится  $Z_i$  по двум последним алгоритмам, используя в качестве значения энергии значение  $\mathcal{E}_i$ .
6. Так как  $Z_{i-1} \leq Z_i$ , это значит, что  $Z_{i-1}$  и есть оптимальные общие затраты на сеть.

#### 7. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ СЕТИ (2-я ФАЗА)

Результаты вычислительного эксперимента по оптимизации общей стоимости сети представлены в табл. 4.

**Таблица 4.** Оптимизация общей стоимости сети

**Table 4.** Optimization of the total network cost

Итерация	Энергия ( $m^5/c$ )	Общая стоимость сети (руб.)
0	187126,94	19152897659,27
1	185255,67	18961541384,83
2	183403,11	18772098822,23
...	...	...
690	182,15	76433358,13
691	180,32	76428941,50
<b>692</b>	<b>178,52</b>	<b>76427135,69</b>
693	176,74	76427925,16

Жирным выделена оптимальная общая стоимость сети.

Ниже идут таблицы с информацией о вершинах (табл. 5) и дугах (ветвях) сети (табл. 6).

Вершины под номерами 1 и 33 особенные (выделены жирным). Вершина 1 является вершиной-источником, а значит, она обеспечивает все вершины требуемым им напором. Вершина 33 не является потребителем потока. Ввиду этого вершины 1 и 33 не требуется обеспечивать напором. В остальных вершинах требуемый напор равен 64,40.

**Таблица 5.** Информация о вершинах

**Table 5.** Information about the peaks

№ вершины	Высота вершины (метр)	Требуемый напор на насосной станции для этой вершины (метр)	Реальный напор, поставляемый в эту вершину (метр)
<b>1</b>	<b>156</b>	<b>262,38</b>	<b>(исходящий напор) 262,38</b>
2	203,6	262,38	64,4
3	204,2	237,28	89,5
4	204,7	231,74	95,03
5	207,6	231,13	95,65
6	211	235,09	91,68
7	210,4	240,09	86,68
8	208,9	250,21	76,57
9	190,2	239,68	87,1
10	192,5	216,29	110,49
11	195,3	196,65	130,13
12	199,3	197,13	129,65
13	202,2	200,6	126,18
14	206,6	210,6	116,18
15	198,7	229,75	97,02
16	183	227,83	98,95
17	186,3	205,43	121,34
18	188,5	185,19	141,58
19	192,8	168,19	158,59
20	192,7	168,66	158,12
21	184,9	183,83	142,95
22	177,5	203,48	123,3
23	178,5	215,94	110,83
24	182	193,75	133,03
25	183,4	172,71	154,07
26	177,7	145,71	181,07
27	173,2	140,52	186,25
28	165,4	155,69	171,09
29	164,4	181,74	145,03
<b>33</b>	<b>172,5</b>	<b>65,52</b>	<b>196,86</b>

Используются пластмассовые (полиэтиленовые) трубы. Соответствующие им коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $k$  определяются из табл. 1 (выделено жирным).

Напор на насосной станции (в метрах): 262,376.

Общий поток в сеть (в кубометрах): 1.708.

Общее время работы сети (в часах): 8760.

КПД: 0.7 (70%).

Цена 1 киловатт-час (в рублях): 5,68.

**Таблица 6.** Информация о дугах (ветвях) сети

**Table 6.** Information about network arcs (branches)

№ дуги	Вершины		Поток (м <sup>3</sup> /с)	Удельные потери напора (метр)	Диаметр трубы (метр)	Удельная стоимость (руб.)	Длина (метр)
	Исток	Сток					
12	14	15	0,061	0,036	0,169	543,539	758,041
17	20	21	0,122	0,031	0,225	949,297	737,041
18	21	22	0,061	0,036	0,169	543,539	758,036
22	27	28	0,122	0,031	0,225	949,297	737,041
23	28	29	0,061	0,036	0,169	543,539	758,001
24	3	2	0,061	0,036	0,169	543,539	720
30	10	9	0,061	0,036	0,169	543,539	720,004
31	11	10	0,122	0,031	0,225	949,297	720,005
36	17	16	0,061	0,036	0,169	543,539	720,008
37	18	17	0,122	0,031	0,225	949,297	720,003
38	19	18	0,183	0,029	0,266	1315,42	740,012
42	24	23	0,061	0,036	0,169	543,539	720,009
43	25	24	0,122	0,031	0,225	949,297	720,001
44	26	25	0,183	0,029	0,266	1315,42	740,022
70	11	4	0,061	0,036	0,169	543,539	720,061
71	12	5	0,061	0,036	0,169	543,539	720,048
72	13	6	0,061	0,036	0,169	543,539	720,054
73	14	7	0,061	0,036	0,169	543,539	720,01
78	19	12	0,122	0,031	0,225	949,297	720,029
79	20	13	0,122	0,031	0,225	949,297	720,063
108	11	3	0,122	0,031	0,225	949,297	1018,27
115	19	11	0,366	0,025	0,354	2297,39	1032,48
148	14	8	0,061	0,036	0,169	543,539	1045,45
153	20	14	0,244	0,027	0,3	1657,96	1030,42
161	33	19	0,732	0,022	0,471	4012,42	818,617
162	33	20	0,549	0,023	0,419	3183,44	798,213
163	33	26	0,244	0,027	0,3	1657,96	389,035
164	33	27	0,183	0,029	0,266	1315,42	344,001
165	1	33	1,708	0,019	0,668	7932,95	2635,05

Энергетические затраты: 31 854 212 руб.

Затраты на трубы: 44 572 923 руб.

Общая стоимость сети: 76 427 135 руб.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработаны метод и алгоритмы компьютерного проектирования больших разветвленных трубопроводных гидравлических сетей высокого ранга оптимальности.
2. В отличие от методов, используемых в проектировании потоковых гидравлических трубопроводных сетей, данный метод предназначен для решения сетевой задачи Кирхгофа, т. е. задачи, содержащей и потоковые, и потенциальные переменные.
3. Разработана программа для проектирования больших разветвленных трубопроводных гидравлических сетей высокого ранга оптимальности.
4. Метод, алгоритм и программа для ЭВМ предназначены для решения актуальной в настоящее время задачи компьютерного проектирования сетей регионального и межрегионального водоснабжения, а также больших трубопроводных оросительных сетей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Меренков А. П., Сеннова Е. В., Сумароков С. В. и др. Математическое моделирование и оптимизация систем тепло-, водо-, нефте- и газоснабжения. Новосибирск: Наука, 1992. 407 с.
2. Абрамов Н. Н., Поспелова М. М., Сомов М. А. и др. Расчет водопроводных сетей. М.: Стройиздат, 1983. 278 с.
3. Булатов В. П., Кассинская Л. И. Некоторые методы минимизации вогнутой функции на выпуклом многограннике // В кн. Методы оптимизации и их приложения. Иркутск: СЭИ СО АН СССР, 1987. С. 151–172.
4. Анциферов Е. Г., Ащепков Л. Т., Булатов В. П. Методы оптимизации и их приложения. Ч. 1. Математическое программирование. Новосибирск: Наука, 1990. 158 с. ISBN: 5-02-029658-9
5. Трубин В. А., Михалевич В. С., Шор Н. З. Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования. М.: Наука, 1986. 260 с.
6. Туй Х. Вогнутое программирование при линейных ограничениях // Доклады АН СССР. 1964. Т. 159. № 1. С. 32–35.
7. Ставровский Е. Р., Трунов Р. А. Новые задачи и компьютерные программы оптимизации конфигурации и параметров региональных газораспределительных сетей при их проектировании // Трубопроводные системы энергетики. Методы математического моделирования и оптимизации: сб. науч. тр. Новосибирск: Наука, 2007. С. 97–108. ISBN: 978-5-02-023193-1
8. Кудяев В. Ч., Абазоков М. Б. Ранговая оптимизация потоковых сетей // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 4(24). С. 178–185. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-178-185
9. Кудяев В. Ч., Абазоков М. Б. Компьютерное проектирование потоковых сетей Р-го ранга оптимальности // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2019. № 6(92). С. 122–131. DOI: 10.35330/1991-6639-2019-6-92-122-131
10. Кудяев В. Ч., Абазоков М. Б. Кустовая оптимизация высокого ранга оптимальности потоковых сетей // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 37. № 4. С. 104–118. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-104-118
11. Абазоков М. Б., Багов М. А., Кудяев В. Ч. Компьютерное проектирование больших трубопроводных сетей высокого ранга оптимальности // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2022. Т. 22. № 4. С. 39–56. DOI: 10.47928/1726-9946-2022-22-4-39-56
12. Абазоков М. Б., Кудяев В. Ч. Трассировка больших разветвленных трубопроводных гидравлических сетей высокого ранга оптимальности на динамическом базовом графе // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2023. № 4(114). С. 39–54. DOI: 10.35330/1991-6639-2023-4-114-39-54

13. Кудяев В. Ч. Ранги экстремумов и структурная оптимизация больших сетевых систем // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2016. № 4(72). С. 15–24. EDN: WKDXXX

14. Некрасова О. А., Хасилев В. Я. Оптимальное дерево трубопроводной системы // Экономика и математические методы. 1970. Т. 4. № 3. С. 427–432.

## REFERENCES

1. Merenkov A.P., Sennova E.V., Sumarokov S.V. et al. *Matematicheskoye modelirovaniye i optimizatsiya sistem teplo-, vodo-, nefte- i gazosnabzheniya* [Mathematical modeling and optimization of heat, water, oil and gas supply systems]. Novosibirsk: Nauka, 1992. 407 p. (In Russian)

2. Abramov N.N., Pospelova M.M., Somov M.A. et al. *Raschet vodoprovodnykh setey* [Calculation of water supply networks]. Moscow: Stroyizdat, 1983. 278 p. (In Russian)

3. Bulatov V.P., Kassinskaya L.I. Some methods for minimizing a concave function on a convex polyhedron. *Metody optimizatsii i ikh prilozheniya* [Optimization Methods and Applications]. Irkutsk: SEI SO AN USSR, 1987. Pp. 151–172. (In Russian)

4. Antsiferov E.G., Ashchepkov L.T., Bulatov V.P. *Metody optimizatsii i ikh prilozheniya. Ch. 1. Matematicheskoye programmirovaniye* [Methods of optimization and their applications. Part 1. Mathematical programming]. Novosibirsk: Nauka, 1990. 158 p. ISBN: 5-02-029658-9. (In Russian)

5. Trubin V.A., Mikhalevich V.S., Shor N.Z. *Optimizatsionnyye zadachi proizvodstvenno-transportnogo planirovaniya* [Optimization problems of production and transport planning]. Moscow: Nauka, 1986. 260 p. (In Russian)

6. Tui H. Concave programming under linear constraints. *Doklady AN SSSR*. 1964. Vol. 159. No. 1. Pp. 32–35. (In Russian)

7. Stavrovskiy E. R., Trunov R. A. *Novye zadachi i komp'yuternyye programmy optimizatsii konfiguratsii i parametrov regional'nykh gazoraspredeletel'nykh setey pri ikh proektirovanii* [New tasks and computer programs for optimizing the configuration and parameters of regional gas distribution networks and their design]. *Truboprovodnyye sistemy energetiki. Metody matematicheskogo modelirovaniya i optimizatsii: sb. nauch. tr.* Novosibirsk: Nauka, 2007. Pp. 97–108. ISBN: 978-5-02-023193-1. (In Russian)

8. Kudaev V.Ch., Abazokov M.B. Rank optimization of streaming networks. *Vestnik KRAUNC. Phys.-Math. Sciences*. 2018. No. 4(24). Pp. 178–185. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-178-185. (In Russian)

9. Kudaev V.Ch., Abazokov M.B. Computer design of flow networks of P-th rank of optimality. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS*. 2019. No. 6(92). Pp. 122–131. DOI: 10.35330/1991-6639-2019-6-92-122-131. (In Russian)

10. Kudaev V.Ch., Abazokov M.B. Cluster optimization of high-rank optimality of flow networks. *Vestnik KRAUNC. Phys.-Math. Sciences*. 2021. Vol. 37. No. 4. Pp. 104–118. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-104-118. (In Russian)

11. Abazokov M.B., Bagov M.A., Kudaev V.Ch. Computer design of large pipeline networks of high optimality rank. *Adyghe International Scientific Journal*. 2022. No. 4. Vol. 22. Pp. 39–56. DOI: 10.47928/1726-9946-2022-22-4-39-56. (In Russian)

12. Abazokov M.B., Kudaev V.Ch. Tracing of large branched pipeline hydraulic networks of high optimality rank with graph presentation. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS*. 2023. No. 4(114). Pp. 39–54. DOI: 10.35330/1991-6639-2023-4-114-39-54. (In Russian)

13. Kudaev V.Ch. Ranks of extremums and structural optimization of large network systems. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS*. 2016. No. 4(72). Pp. 15–24. EDN: WKDXXX. (In Russian)

14. Nekrasova O.A., Khasilev V.Ya. Optimal tree of a pipeline system. *Ekonomika i matematicheskiye metody* [Economics and Mathematical Methods]. 1970. Vol. 4. No. 3. Pp. 427–432. (In Russian)

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Contribution of the authors:** the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

**Финансирование.** Исследование проведено без спонсорской поддержки.

**Funding.** The study was performed without external funding.

### Информация об авторах

**Абазоков Мухаммед Борисович**, мл. науч. сотр., отдел вычислительных методов, Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра РАН; 360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А;

Abazokov.Mukhammed@yandex.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6847-403X>, SPIN-код: 3343-5679

**Кудаев Валерий Черимович**, канд. ф.-м. наук, вед. науч. сотр., отдел вычислительных методов, Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра РАН;

360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А;

valeriy.kudayev@mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8313-4199>, SPIN-код: 9931-1060

### Information about the authors

**Mukhammed B. Abazokov**, Junior Researcher, Department of Computational Methods, Institute of Applied Mathematics and Automation – branch of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences;

360000, Russia, Nalchik, 89 A Shortanov street;

Abazokov.Mukhammed@yandex.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6847-403X>, SPIN-code: 3343-5679

**Valery Ch. Kudaev**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Lead Researcher, Department of Computational Methods, Institute of Applied Mathematics and Automation – branch of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences;

360000, Russia, Nalchik, 89 A Shortanov street;

valeriy.kudayev@mail.ru, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8313-4199>, SPIN-code: 9931-1060