

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР «КАБАРДИНО-БАЛКАРСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК» (КБНЦ РАН)**

НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

**БАЗОВАЯ КАФЕДРА «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»**

«ПРИНЯТО»

На заседании Ученого совета КБНЦ РАН
«_____» _____ 2022 г.
Постановление № _____

«УТВЕРЖДАЮ»

Генеральный директор КБНЦ РАН
/З.В. Нагоев/ _____ /
«_____» _____ 2022 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА ПО
СПЕЦИАЛЬНОСТИ**

«Дифференциальные уравнения и математическая физика»

Программа подготовки научных и научно-педагогических кадров

Группа научных специальностей: 1.1–Математика и механика

Специальность:

1.1.2 - Дифференциальные уравнения и математическая физика

Форма обучения
ОФО, соискательство

Нальчик

2022

Рабочая программа кандидатского экзамена по специальности «Дифференциальные уравнения и математическая физика» разработана и составлена на основании Федеральных государственных требований к структуре программ подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре и в соответствии с индивидуальным учебным планом работы аспиранта.

Составитель рабочей программы: _____
(ФИО, ученая степень, ученое звание) (подпись)

Рабочая программа рассмотрена на заседании *кафедры Дифференциальных уравнений и математической физики*

Протокол от « ____ » _____ 202__ г. № ____

Зав. кафедрой _____
(ФИО, ученая степень, ученое звание) (подпись)

Руководитель НОЦ КБНЦ РАН _____ /д.и.н. А.Х. Абазов/

I. Цели и задачи освоения дисциплины

Дисциплина направлена на формирование у аспирантов углубленных знаний по математике и математической физике для успешной сдачи кандидатского экзамена по специальности «Дифференциальные уравнения и математическая физика».

II. Содержание и структура дисциплины

Лекционные занятия

ЧАСТЬ I

Понятие метрического пространства, полные метрические пространства, компактность. Теорема Бальцано-Вейерштрасса. Принцип сходимости Коши. Непрерывность функции одной переменной. Свойства непрерывных функций. Определенный интеграл. Критерий интегрируемости функции по Риману. Интегрируемость непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница.

Непрерывность функции нескольких переменных. Полный дифференциал и его и его геометрический смысл. Достаточные условия дифференцируемости. Неявные функции. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявных функций. Локальный экстремум функции многих переменных. Достаточное условие. Условный экстремум функции многих переменных. Необходимое условие. Метод множителей Лагранжа. Криволинейные интегралы первого и второго рода, формула Грина. Поверхностные интегралы первого и второго рода. Формула Гаусса-Остроградского. Формула Стокса в трехмерном пространстве.

Ортогональные системы функций. Неравенство Бесселя, условие полноты. Ряды Фурье. Достаточные условия сходимости рядов Фурье. Полнота тригонометрической системы в пространстве непрерывных функций, периодических на отрезке $[0, 2\pi]$. Мера в смысле Лебега. Измеримые функции и их свойства. Интеграл Лебега и его основные свойства.

Дифференциальные уравнения первого порядка. Теорема существования и единственности решения. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами: однородные и неоднородные. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами: однородные и неоднородные.

Функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной. Элементарные функции комплексного переменного и даваемые ими конформные отображения. Простейшие многозначные функции. Дробно-линейные преобразования. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора. Аналитическое продолжение. Область сходимости степенного ряда. Радиус сходимости. Дифференцирование и интегрирование степенного ряда внутри круга сходимости. Ряд Лорана. Изолированные особые точки. Теорема Коши о вычетах. Теорема Вейерштрасса об аналитичности суммы ряда из аналитических функций. Аналитическая функция в целом. Римановы поверхности.

Определители. Свойства полилинейности и кососимметричности. Определитель транспонированной матрицы. Определитель с углом нулей, определитель произведения

квадратных матриц. Разложение определителя по строке (столбцу). Теорема о ранге матрицы. Обратная матрица (существование и единственность). Способы вычисления.

Линейные пространства, их подпространства. Базис, размерность. Системы линейных уравнений. Геометрическая интерпретация системы линейных уравнений. Фундаментальная система решения системы однородных линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Теорема Крамера о системах линейных уравнений с квадратной матрицей.

Билинейные и квадратичные функции и формы в линейных пространствах, их матрицы, приведение к нормальному виду. Закон инерции квадратичных форм.

Линейные отображения и преобразования линейного пространства, их задания матрицами. Характеристический многочлен. Собственные векторы и собственные значения, связь последних с характеристическими корнями. Приведение матрицы, линейного оператора к жордановой форме.

Евклидово пространство. Ортонормированные базисы. Ортогональные матрицы. Ортогональные и самосопряженные преобразования, приведение квадратичной формы к главным осям. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Матрица Грамма системы векторов, связь с объемом.

Аффинная и метрическая классификация кривых и поверхностей 2-го порядка.

Группы. Подгруппы. Порядок элемента. Циклические группы. Фактор-группа. Теорема о гомоморфизмах групп. Прямое произведение групп. Порядки элементов прямого произведения. Разложимость циклических групп в прямое произведение. Теорема о разложении конечно-порожденной абелевой группы в прямое произведение циклических подгрупп.

Деление многочленов от одной переменной с остатком. Корни многочлена и теорема Безу. Кратность корня, связь с производной. Разложение многочленов от одной переменной над полем на неприводимые множители. Теорема о симметрических многочленах.

Криволинейные координаты на поверхности. Первая квадратичная форма поверхности. Вторая квадратичная форма поверхности. Нормальная кривизна линии на поверхности. Теорема Менье. Главные направления и главные кривизны. Формула Эйлера. Гауссова кривизна поверхности, ее геометрический смысл.

ЧАСТЬ II

Теорема существования и единственности решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема о продолжении решения. Случай линейных уравнений.

Теорема о непрерывной зависимости и дифференцируемости решений по начальным условиям и по параметру. Уравнения в вариациях.

Теорема о выпрямлении векторного поля.

Линейные системы. Определитель Вронского. Теорема Лиувилля. Метод вариации постоянных.

Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Экспонента линейного оператора. Системы с правой частью в виде квазимногочлена.

Устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость. Теорема об устойчивости по первому приближению.

Особые точки линейных систем на плоскости.

Первые интегралы. Теорема о существовании полной системы первых интегралов.

Квазилинейные уравнения с частными производными 1-го порядка. Задача Коши.

Обобщенные функции. Действия над обобщенными функциями. Фундаментальные решения операторов с постоянными коэффициентами.

Задача Коши для волнового уравнения. Энергетическое неравенство. Единственность решения задачи Коши.

Формулы Кирхгофа и Пуассона для волнового уравнения. Качественное исследование задачи Коши для волнового уравнения.

Смешанная задача для волнового уравнения. Единственность. Решение ее методом Фурье (обоснование метода Фурье в случае одной пространственной переменной).

Фундаментальное решение оператора Лапласа. Функция Грина для задачи Дирихле и ее свойства. Функция Грина для шара. Решение задачи Дирихле для шара.

Свойства гармонических функций: теорема о среднем, принцип максимума, теорема Лиувилля, теорема об устранимой особенности.

Задачи Дирихле и Неймана. Единственность. Условие разрешимости задачи Неймана. Внешние задачи. Сведение их к внутренним задачам.

Уравнение теплопроводности. 1-я краевая задача. Принцип максимума. Единственность. Решение ее методом Фурье. Задачи Коши. Принцип максимума для слоя. Интеграл Пуассона.

III. Образовательные технологии

В НОЦ КБНЦ РАН имеются специализированные помещения с выходом в интернет, специальные ПО (регулярно обновляемые), для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, помещение для самостоятельной работы. Помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления информации большой аудитории.

IV. Перечень вопросов к экзамену по специальной дисциплине

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема о продолжении решения. Случай линейных уравнений.
2. Понятие метрического пространства, полные метрические пространства, компактность. Теорема Бальцано-Вейерштрасса. Принцип сходимости Коши. Непрерывность функции одной переменной. Свойства непрерывных функций. Определенный интеграл. Критерий интегрируемости функции по Риману. Интегрируемость непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница.
3. Теорема о непрерывной зависимости и дифференцируемости решений по начальным условиям и по параметру. Уравнения в вариациях.
4. Определители. Свойства полилинейности и кососимметричности. Определитель транспонированной матрицы. Определитель с углом нулей, определитель произведения квадратных матриц. Разложение определителя по строке (столбцу). Теорема о ранге матрицы. Обратная матрица (существование и единственность). Способы вычисления.
5. Устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость. Теорема об устойчивости по первому приближению.
6. Дифференциальные уравнения первого порядка. Теорема существования и единственности решения. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами: однородные и неоднородные. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами: однородные и неоднородные.

7. Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Экспонента линейного оператора. Системы с правой частью в виде квазимногочлена.
8. Функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной. Элементарные функции комплексного переменного и даваемые ими конформные отображения. Простейшие многозначные функции. Дробно-линейные преобразования. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши.
9. Линейные системы. Определитель Вронского. Теорема Лиувилля. Метод вариации постоянных.
10. Непрерывность функции нескольких переменных. Полный дифференциал геометрический смысл. Достаточные условия дифференцируемости.
11. Особые точки линейных систем на плоскости.
12. Ортогональные системы функций. Неравенство Бесселя, условие полноты. Ряды Фурье. Достаточные условия сходимости рядов Фурье.
13. Теорема о выпрямлении векторного поля.
14. Ряд Тейлора. Аналитическое продолжение. Область сходимости степенного ряда. Радиус сходимости. Дифференцирование и интегрирование степенного ряда внутри круга сходимости.

V. Оценка кандидатского экзамена по специальности

К числу наиболее значимых критериев оценивания знаний, умений относятся:

- умение извлекать, систематизировать, анализировать и грамотно использовать информацию из теоретических, научных, справочных, энциклопедических источников;
- умение самостоятельно решать проблему на основе существующих методов, приемов, технологий;
- умение ясно, четко, логично и грамотно излагать собственные размышления, делать умозаключения и выводы;
- умение пользоваться ресурсами глобальной сети (Интернет);
- умение пользоваться нормативными документами;
- умение создавать и применять документы, связанные с профессиональной деятельностью;
- умение определять, формулировать проблему и находить пути ее решения;
- умение анализировать современное состояние отрасли, науки и техники;
- умение самостоятельно принимать решения на основе проведенных исследований;
- умение создавать содержательную презентацию выполненной работы.

К основным критериям оценивания компетенций относятся:

- способность эффективно работать самостоятельно и в команде;
- способность к профессиональной и социальной адаптации;
- способность понимать и анализировать социальные, экономические и экологические последствия своей профессиональной деятельности;
- готовность к постоянному развитию;
- способность использовать широкие теоретические и практические знания в рамках специализированной части какой-либо области;

- способность интегрировать знания из новых или междисциплинарных областей для исследовательского диагностирования проблем;
- способность демонстрировать критический анализ, оценку и синтез новых сложных идей;
- способность оценивать свою деятельность и деятельность других;
- способность последовательно оценивать собственное обучение и определять потребности в обучении для его продолжения.

Критерии оценивания:

– Знания, умения, навыки аспирантов оцениваются оценками: "отлично", "хорошо", "удовлетворительно", "неудовлетворительно". Эти оценки проставляются в аттестационную ведомость.

– Оценка «отлично» выставляется аспиранту, если он глубоко и прочно усвоил программный материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно его излагает, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, причем не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, использует в ответе материал монографической литературы, правильно обосновывает принятое решение, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических задач

– Оценка «хорошо» выставляется аспиранту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми навыками и приемами их выполнения.

– Оценка «удовлетворительно» выставляется аспиранту, если он имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, испытывает затруднения при выполнении практических работ.

– Оценка «неудовлетворительно» выставляется аспиранту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы. Как правило, оценка "неудовлетворительно" ставится аспирантам, которые не могут продолжить обучение без дополнительных занятий по соответствующей дисциплине.

VI. Литература

1. *Александров П.С.* Лекции по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968.
2. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1971.
3. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. – М.: Дрофа, 2004.
4. *Винберг Э.Б.* Курс алгебры. – М.: Факториал Пресс, 2002.
5. *Зорич В.А.* Математический анализ. Тт. 1 и 2. – М.: МЦНМО, 2007.
6. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Физматлит, 2004.
7. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Чч. 1–3. – М.: МАИК НАУКА, 2000.
8. *Маркушевич А.И.* Введение в теорию аналитических функций. – М.: Наука. Т.1. – 1967; Т.2. – 1968.
9. *Михалев А.В., Михалев А.А.* Начала алгебры. Ч.1. – М.: Интернет-Ун-т Информ. технологий, 2005.
10. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995.
11. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. – М.: Физматлит, 2001.
12. *Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Элементы дифференциальной геометрии и топологии. – М.: Наука, 1987.

13. *Петровский И.Г.* Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1964.
14. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1982.
15. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. – М.: Едиториал УРСС, 2003.
16. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Тт. 1, 2. – М.: Наука, 1987.

VII. Перечень Интернет-ресурсов

Научная электронная библиотека «E-Library» - <https://elibrary.ru/defaultx.asp>

VIII. Описание материально-технической базы.

Для реализации программы подготовки по дисциплине (модулю) перечень материально-технического обеспечения включает:

- Учебная и научная литература по курсу.
- Видеозаписи, связанные с программой курса, компьютерные демонстрации, технические возможности для их просмотра и прослушивания.
- Свободный доступ в Интернет, наличие компьютерных программ общего назначения.

IX. Требования к аудиториям (помещениям, местам) для проведения занятий

Для проведения теоретических занятий по дисциплине (модулю) необходимы:

Специальные помещения для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, а также помещения для самостоятельной работы и помещения для хранения и профилактического обслуживания оборудования.

Специальные помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы аспирантов оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети "Интернет" и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации).

Лекционные и семинарские занятия проводятся в специализированной аудитории, по адресу: КБР, г. Нальчик, ул. Инесса Арманд 37 «а», ИИПРУ, учебный зал НОЦ КБНЦ РАН.

XI. Требования к специализированному оборудованию

Проведение занятий осуществляется в аудиториях, оборудованных аудиторным фондом; компьютерами с возможностью доступа к справочно-поисковым системам информационно-правового обеспечения; специализированные аудитории с ПК и мультимедийным проектором; библиотечно-информационными ресурсами.

