МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК: 517.95
DOI: 10.35330/1991-6639-2024-26-4-130-144
EDN: XBPQQS

Научная статья

Краевая задача для дифференциально-разностного уравнения с дробной производной

Л. М. Видзижева[1], Д. А. Канаметова[2]

[1]Научно-образовательный центр
Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук
360010, Россия, г. Нальчик, ул. Балкарова, 2
[2]Институт прикладной математики и автоматизации –
филиал Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук
360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

Аннотация. Работа посвящена исследованию дифференциально-разностного уравнения с дробной производной порядка, не превосходящего единицу. Для рассматриваемого уравнения ставится и решается краевая задача на многообразии, представляющем собой счетное объединение интервалов. Для решения задачи использован аналог метода функции Грина, адаптированный для дифференциально-разностных уравнений. Найдено общее представление решения исследуемого уравнения, в терминах функции Прабхакара построено фундаментальное решение, изучены его свойства, доказана теорема о существовании и единственности решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: дробная производная, уравнение Мак-Кендрика – Фон Ферстера, оператор дробного интегрирования, оператор дробного дифференцирования, дифференциально-разностное уравнение, интеграл Римана – Лиувилля, разностные операторы, функция Прабхакара, функция Миттаг-Леффлера

Поступила 16.05.2024, одобрена после рецензирования 12.07.2024, принята к публикации 18.07.2024

Для цитирования. Видзижева Л. М., Канаметова Д. А. Краевая задача для дифференциально-разностного уравнения с дробной производной // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2024. Т. 26. № 4. С. 130–144. DOI: 10.35330/1991-6639-2024-26-4-130-144

MSC: 33C60, 33E50

Original article

Boundary value problem for a differential-difference equation with a fractional derivative

L.M. Vidzizheva[1], D.A. Kanametova[2]

[1]Scientific and Educational Center
Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
360010, Russia, Nalchik, 2 Balkarov street
[2]Institute of Applied Mathematics and Automation –
branch of Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences
360000, Russia, Nalchik, 89 A Shortanov street

Abstract. The work is devoted to the study of a differential-difference equation with a fractional derivative of order not exceeding one. For the equation under consideration, a boundary value problem is posed and solved on a manifold that is a countable union of intervals. To solve the problem, we used an analogue of the Green function method, adapted for differential-difference equations. A general representation of the solution to the equation under study has been found, a fundamental solution has been constructed in terms of the Prabhakar function, its properties have been studied, and a theorem on the existence and uniqueness of a solution to the problem under study has been proven.

Keywords: fractional derivative, McKendrick – Von Foerster equation, fractional integration operator, fractional differentiation operator, differential-difference equation, Riemann – Liouville integral, difference operators, Prabhakar function, Mittag-Leffler function

Submitted 16.05.2024, approved after reviewing 12.07.2024, accepted for publication 18.07.2024

For citation. Vidzizheva L.M., Kanametova D.A. Boundary value problem for a differential-difference equation with a fractional derivative. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of RAS.* 2024. Vol. 26. No. 4. Pp. 130–144. DOI: 10.35330/1991-6639-2024-26-4-130-144

Введение

Рассмотрим уравнение

$$\nabla_n u_n(t) + \lambda\, D_{0x}^{\alpha} u_n(x) + \mu\, u_n(x) = f_n(x), \tag{1}$$

где D_{0x}^{α} – производная Римана – Лиувилля порядка α с началом в точке $x = 0$ по переменной x [1], ∇_n – нисходящая конечная разность первого порядка [2], λ и μ – заданные постоянные, $f_n(x)$ – заданная, $u_n(x)$ искомая функции; $0 < \alpha < 1$, $(n, x) \in \mathbb{N} \times (0, T)$, $0 < T < \infty$.

Уравнение (1) относится к классу дифференциально-разностных уравнений и является разностным аналогом уравнения Мак-Кендрика – Фон Ферстера дробного порядка [3]

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \lambda\, D_{0x}^{\alpha} u(t, x) + \mu\, u(t, x) = f(t, x), \tag{2}$$

возникающего в популяционной динамике [4]. Обзор работ, посвященных исследованию уравнений вида (2), можно найти в [5]. Уравнение (1) ранее практически не исследовалось.

Цель данной работы – исследование краевой задачи для уравнения (1). В частности, строится общее представление решений и находится фундаментальное решение уравнения (1). В современных реалиях математическое использование строгого аппарата разностных уравнений дает возможность применить мощный комплекс математических средств для анализа динамики различных социально-экономических процессов, в частности, уравнения Мак-Кендрика – Фон Ферстера.

Уравнение Мак-Кендрика – Фон Ферстера является дифференциальным уравнением первого порядка, которое описывает динамику изменения численности населения в зависимости от рождаемости и смертности, его часто применяют при моделировании различных социо-эколого-экономических процессов управления [1]: экономического роста в зависимости от темпов роста населения, рынка труда в зависимости от численности населения; государственных расходов: применимо для моделирования государственных расходов на образование, здравоохранение и другие социальные программы в зависимости от численности населения.

Вводные сведения

Операторы дробного интегрирования и дифференцирования

Дробный интеграл Римана – Лиувилля с началом в точке $x = a$ порядка β от интегрируемой функции $g(x)$ определяется равенством [1]

$$D_{ax}^{\beta} g(x) = \frac{\operatorname{sign}(x-a)}{\Gamma(-\beta)} \int_a^x g(t)|x-t|^{-\beta-1}\, dt, \qquad (\beta < 0).$$

Предполагается, что

$$D_{ax}^{0}g(x)=g(x).$$

Дробные производные Римана – Лиувилля и Герасимова – Капуто определяются, соответственно, равенствами

$$D_{ax}^{\beta}g(x)=\mathrm{sign}^{\mathrm{n}}(x-a)\frac{d^n}{dx^n}D_{ax}^{\beta-n}g(x),\ \partial_{ax}^{\beta}g(x)=\mathrm{sign}^{\mathrm{n}}(x-a)D_{ax}^{\beta-n}\frac{d^n}{dx^n}g(x),$$

где n – натуральное число, выбранное из условия

$$n-1<\beta\le n \qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Имеет место формула дробного интегрирования по частям:

$$\int_a^b h(x)D_{ax}^{\beta}g(x)\ dt=\int_a^b g(x)\partial_{bx}^{\beta}h(x)\ dt+ \tag{3}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left\{h^{(k-1)}(b)\left[D_{ax}^{\beta-k}g(x)\right]_{x=b}-h^{(k-1)}(a)\left[D_{ax}^{\beta-k}g(x)\right]_{x=a}\right\}.$$

Разностные операторы

Для последовательности (функции целочисленного аргумента) $h(n)=h_n$ конечные нисходящая и восходящая разности первого порядка определяются, соответственно, равенствами [2]

$$\nabla_n h_n=h_n-h_{n-1},\ \Delta_n h_n=h_{n+1}-h_n.$$

Легко проверить, что

$$\nabla_n\sum_{k=m}^{n}h_k=h_n,\quad \Delta_n\sum_{k=m}^{n}h_k=h_{n+1}\,,\ n\ge m.$$

Также справедлива формула преобразования Абеля (дискретный аналог формулы интегрирования по частям)

$$\sum_{k=m}^{n}a_k\cdot\nabla_k b_k=-\sum_{k=m}^{n}b_k\cdot\Delta_k a_k+a_{n+1}b_n-a_m b_{m-1} \tag{4}$$

или

$$\sum_{k=m}^{n}a_k\cdot\nabla_k b_k=-\sum_{k=m}^{n-1}b_k\cdot\Delta_k a_k+a_n b_{n-1}-a_m b_{m-1}.$$

Постановка задачи

Далее будем обозначать

$$\Omega=\{(n,x):\ n\in\mathbb{N},\ x\in(0,T)\}=\mathbb{N}\times(0,T).$$

Как принято, через $AC[0,a]$ обозначаем множество абсолютно непреывных на отрезке $[0,a]$ функций, а

$$AC[0,a)=\{g(x)\in AC[0,a-\varepsilon]\ \forall\varepsilon\in(0,a)\}.$$

Определение. *Регулярным решением уравнения* (1) *в* Ω *будем называть функцию* $u(n,x)=u_n(x)$, *такую что* $x^{\delta-1}u_n(x)\in C[0,T)$ *для некоторого* $\delta>0$ *и* $D_{0x}^{\alpha-1}u_n(x)\in AC[0,T)$ $\forall n\in\mathbb{N}$, *удовлетворяющую уравнению* (1) *для любого* $x\in(0,T)$ *и* $n\in\mathbb{N}$.

Будем рассматривать следующую задачу.

Задача. *Найти регулярное решение уравнения* (1) *в Ω, удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1} u_n(x) = \tau_n, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

и

$$u_0(x) = \varphi(x), \qquad x \in (0,T), \tag{6}$$

где $\tau_n \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) \in L(0,T)$.

Построение решения

Пусть $w(n,x) = w_n(x) \in L(0,T)$, $n = -1,0,1,2, \ldots$. Рассмотрим выражение

$$\sum_{k=m}^{n} \int_0^x w_{n-k}(x-t)\, f_k(t)\, dt =$$

$$= \sum_{k=m}^{n} \int_0^x w_{n-k}(x-t)[\nabla_k u_k(t) + \lambda\, D_{0t}^{\alpha} u_k(t) + \mu\, u_k(t)]\; dt. \tag{7}$$

Преобразуем каждое слагаемое в правой части. Для первого слагаемого, с учетом дискретного аналога формулы интегрирования по частям (4), получаем

$$\sum_{k=m}^{n} \int_0^x w_{n-k}(x-t) \nabla_k u_k(t)\; dt =$$

$$= -\sum_{k=m}^{n} \int_0^x u_k(t)\, \Delta_k\, w_{n-k}(x-t)\, dt + \tag{8}$$

$$+ \int_0^x [w_{-1}(x-t) u_n(t) - w_{n-m}(x-t) u_{m-1}(t)]\, dt.$$

Второе слагаемое, с учетом формулы дробного интегрирования по частям (3), преобразуется к виду

$$\sum_{k=m}^{n} \int_0^x w_{n-k}(x-t) D_{0t}^{\alpha} u_k(t)\, dt = \sum_{k=m}^{n} \int_0^x u_k(t)\, \partial_{xt}^{\alpha} w_{n-k}(x-t)\, dt +$$

$$+ \sum_{k=m}^{n} \{ w_{n-k}(0) D_{0t}^{\alpha-1} u_k(t) - w_{n-k}(x) [D_{0t}^{\alpha-1} u_k(t)]_{t=0} \}. \tag{9}$$

Подставляя соотношения (8) и (9) в выражение (7), учитывая условия (5) и (6), приходим к равенству

$$\sum_{k=m}^{n} \int_0^x w_{n-k}(x-t)\, f_k(t)\, dt =$$

$$= \sum_{k=m}^{n} \int_0^x u_k(t) [-\Delta_k\, w_{n-k}(x-t) + \lambda\, \partial_{xt}^{\alpha} w_{n-k}(x-t) + \mu\, w_{n-k}(x-t)]\; dt +$$

$$+\int_0^x [w_{-1}(x-t)u_n(t) - w_{n-m}(x-t)u_{m-1}(t)]\,dt +$$

$$+\lambda \sum_{k=m}^{n} \{w_{n-k}(0) D_{0t}^{\alpha-1} u_k(t) - \tau_k\, w_{n-k}(x)\}. \qquad (10)$$

Далее предположим, что функция $w_n(x)$ такова, что она удовлетворяет уравнению

$$-\Delta_k\ w_{n-k}(x-t) + \lambda\, \partial_{xt}^{\alpha}\, w_{n-k}(x-t) + \mu\, w_{n-k}(x-t) = 0, k = 1,2, \dots, n, \qquad (11)$$

а также краевым условиям

$$w_{-1}(t) = 1, \qquad 0 < t < x, \qquad (12)$$

и

$$w_{n-k}(0) = 0, \qquad k = 1,2, \dots, n. \qquad (13)$$

Теперь, приняв $m = 1$, с учетом соотношений (11), (12) и (13), а также условия (6), равенство (11) можно переписать в виде.

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^x w_{n-k}(x-t)\, f_k(t)\,dt =$$

$$= \int_0^x [u_n(t) - w_{n-1}(x-t)\varphi(t)]\,dt - \lambda \sum_{k=1}^{n} \tau_k\, w_{n-k}(x).$$

Принимая во внимание (13), дифференцируя обе части последнего равенства, приходим к соотношению

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^x w'_{n-k}(x-t)\, f_k(t)\,dt +$$

$$+\lambda \sum_{k=1}^{n} \tau_k\, w'_{n-k}(x) + \int_0^x w'_{n-1}(x-t)\varphi(t)\,dt. \qquad (14)$$

Таким образом, мы показали, что $u_n(x)$ решение задачи (1), (5), (6) существует, а также существует решение задачи (11), (12) и (13), то $u_n(x)$ можно представить в виде (14).

Сформулируем полученное в виде утверждения.

Лемма 1. *Пусть $\varphi(x) \in L(0,T)$, $f(x) \in L(0,T)$, $u_n(x)$ является регулярным решением задачи (1), (5), (6), а $w_n(x)$ есть решение задачи (11), (12) и (13). Тогда функция $u_n(x)$ представима в виде*

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^x v_{n-k}(x-t)\, f_k(t)\,dt +$$

$$+\lambda \sum_{k=1}^{n} \tau_k\, v_{n-k}(x) + \int_0^x v_{n-1}(x-t)\varphi(t)\,dt, \qquad (15)$$

где $v_n(x) = w'_n(x)$.

Итак, для построения решения задачи (1), (5), (6) необходимо найти решение специальной задачи (11), (12) и (13).

Специальная задача

Редукция к разностному уравнению

Далее будем искать решения специальной задачи (11), (12) и (13).

Зафиксировав x и n, сделаем замену

$$j = n - k\,, \qquad s = x - t.$$

С учетом этой замены получим

$$w_{n-k}(x-t) = w_j(s), \tag{16}$$

а также

$$\Delta_k\, w_{n-k}(x-t) = w_{n-k-1}(x-t) - w_{n-k}(x-t) = w_{j-1}(s) - w_j(s) = -\nabla_j w_j(s) \tag{17}$$

и

$$\partial_{xt}^{\alpha} w_{n-k}(x-t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_t^x \frac{d}{d\xi} w_{n-k}(x-\xi)(\xi-t)^{-\alpha}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{x-t} \frac{d}{d\eta} w_{n-k}(\eta)(x-t-\eta)^{-\alpha}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{s} w_j'(\eta)(s-\eta)^{-\alpha}\,d\xi = \partial_{0s}^{\alpha} w_j(s). \tag{18}$$

Принимая во внимание равенства (16), (17) и (18), задача (11), (12) и (13) примет вид

$$\nabla_j w_j(s) + \lambda\, \partial_{0s}^{\alpha} w_j(s) + \mu\, w_j(s) = 0, \qquad j = 0,1,\dots,n-1, \tag{19}$$

$$w_{-1}(s) = 1, \qquad\qquad s > 0, \tag{20}$$

и

$$w_j(0) = 0, \qquad j = 0,1,\dots,n-1. \tag{21}$$

Далее будем решать задачу (19), (20), (21). Для этого применим преобразование Лапласа [5]. Пусть

$$W_j(p) = \mathcal{L}\big(w_j(s);p\big) := \int_0^{\infty} e^{-ps}\, w_j(s)ds,$$

т.е. $W_j(p)$ – преобразование Лапласа функции $w_j(s)$. Принимая во внимание условие (21), нетрудно показать, что

$$\mathcal{L}\big(\partial_{0s}^{\alpha} w_j(s);p\big) = p^{\alpha} W_j(p).$$

С учетом этого, применяя к обеим частям уравнения (19) преобразование Лапласа, получаем, что функция $W_j(p)$ является решением разностного уравнения

$$\nabla_j W_j(p) + \lambda\, p^{\alpha} W_j(p) + \mu\, W_j(p) = 0, \qquad j = 0,1,\dots,n-1. \tag{22}$$

Кроме того, в силу условия (20) и равенства [6]

$$\mathcal{L}(1;p) = \frac{1}{p}$$

функция $W_j(p)$ удовлетворяет начальному условию

$$W_{-1}(p) = \frac{1}{p}. \tag{23}$$

Решение разностного уравнения

Принимая во внимание определение нисходящего разностного оператора, перепишем уравнение (22) в виде

$$[1+\mu+\lambda p^{\alpha}]W_j(p) - W_{j-1}(p) = 0$$

или

$$W_j(p) = \frac{W_{j-1}(p)}{1+\mu+\lambda p^{\alpha}}.$$

Решая итерационно это уравнение, получаем

$$W_j(p) = \frac{W_{j-1}(p)}{1+\mu+\lambda p^{\alpha}} = \frac{W_{j-2}(p)}{(1+\mu+\lambda p^{\alpha})^2} = \cdots$$

$$\dots = \frac{W_0(p)}{(1+\mu+\lambda p^{\alpha})^j} = \frac{W_{-1}(p)}{(1+\mu+\lambda p^{\alpha})^{j+1}}.$$

Отсюда, принимая во внимание условие (23), получаем, что

$$W_j(p) = \frac{1}{p(1+\mu+\lambda p^{\alpha})^{j+1}}. \tag{24}$$

Представление решения специальной задачи в виде ряда

Теперь для нахождения решения задачи (19), (20), (21) (следовательно, и задачи (11), (12) и (13)) необходимо найти обратное преобразование функции $W_j(p)$. Для этого, воспользовавшись разложением

$$\frac{1}{(1-z)^{j+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+j)!}{j!\ k!}\, z^k, \qquad |z| < 1,$$

перепишем (24) в виде

$$W_j(p) = \frac{1}{p(1+\mu+\lambda p^{\alpha})^{j+1}} = \frac{1}{\lambda^{j+1} p^{\alpha(+1)+1}} \left(1 + \frac{1+\mu}{\lambda p^{\alpha}}\right)^{-j-1} =$$

$$= \frac{1}{\lambda^{j+1} p^{\alpha(j+1)+1}\, j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\ (k+j)!}{k!\ \lambda^k} (1+\mu)^k p^{-\alpha k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\ (k+j)!\ (1+\mu)^k}{j!\ k!\ \lambda^{k+j+1} p^{\alpha(k+j)+\alpha+1}}.$$

Принимая во внимание формулу [6]

$$\mathcal{L}\left(s^{\xi-1}; p\right) = \frac{\Gamma(\xi)}{p^{\xi}}$$

или, что то же самое,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(p^{-\xi}; s\right) = \frac{s^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)}$$

(здесь и далее через $\mathcal{L}^{-1}$ обозначено обратное преобразование Лапласа), получаем, что

$$w_j(s) = \mathcal{L}^{-1}\big(W_j(p); s\big) = \frac{s^{\alpha j+\alpha}}{j!\,\lambda^{j+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(k+j)!\,(1+\mu)^k\,s^{\alpha k}}{k!\,\lambda^k \Gamma(\alpha(k+j)+\alpha+1)}. \qquad (25)$$

Функция Прабхакара

Напомним определение функции Прабхакара [7]:

$$E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k\,z^k}{k!\,\Gamma(\alpha k+\beta)}, \qquad (26)$$

где

$$(\gamma)_k = \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\dots(\gamma+k-1) = \frac{\Gamma(\gamma+k)}{\Gamma(\gamma)} \qquad (27)$$

– символ Похгаммера.

Принимая во внимание формулы (27) и

$$\frac{(k+j)!}{j!} = \frac{\Gamma(k+j+1)}{\Gamma(j+1)} = (j+1)_k,$$

равенство (25) можно переписать в виде

$$w_j(s) = \frac{s^{\alpha j+\alpha}}{\lambda^{j+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(j+1)_k\,(1+\mu)^k\,s^{\alpha j}}{k!\,\lambda^k \Gamma(\alpha(k+j)+\alpha+1)}.$$

Отсюда, с учетом определения (26), получаем

$$w_j(s) = \frac{s^{\alpha j+\alpha}}{\lambda^{j+1}} E^{j+1}_{\alpha,\alpha j+\alpha+1}\left(-\frac{1+\mu}{\lambda} s^{\alpha}\right). \qquad (28)$$

Решение специальной задачи

Таким образом, мы получили, что если решение специальной задачи (19), (20), (21) (или, что то же самое, задачи (11), (12) и (13)) существует, то оно имеет вид (28). Здесь мы покажем, что функция (28) на самом деле является решением задачи (19), (20), (21).

Лемма 2. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$ *и* $\lambda \neq 0$. *Тогда функция (28) является решением уравнения (19) (а также (11)) и удовлетворяет условиям (20) и (21) (а также (12) и (13)).*

Доказательство. Для функции Прабхакара известны следующие формулы дробного интегрирования и дифференцирования [8]:

$$D^{\xi}_{0x}\left[x^{\beta-1} E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(\eta\,x^{\alpha})\right] = x^{\beta-\xi-1} E^{\gamma}_{\alpha,\beta-\xi}(z), (\beta > 0), \qquad (29)$$

а также формула автотрансформации [9]

$$E^{\gamma}_{\alpha,\beta}(z) = E^{\gamma+1}_{\alpha,\beta}(z) - z E^{\gamma+1}_{\alpha,\alpha+\beta}(z). \qquad (30)$$

Из формул (29) и (30) следует, что

$$w_{j-1}(s) = \frac{s^{\alpha j}}{\lambda^{j}} E^{j}_{\alpha,\alpha j+1}\left(-\frac{1+\mu}{\lambda} s^{\alpha}\right) =$$

$$= \frac{s^{\alpha j}}{\lambda^j} E^{j+1}_{\alpha,\alpha j+1}\left(-\frac{1+\mu}{\lambda} s^\alpha\right) + (1+\mu)\frac{s^{\alpha j+\alpha}}{\lambda^{j+1}} E^{j+1}_{\alpha,\alpha j+\alpha+1}\left(-\frac{1+\mu}{\lambda} s^\alpha\right) =$$

$$= \partial^\alpha_{0s} \frac{s^{\alpha j+\alpha}}{\lambda^j} E^{j+1}_{\alpha,\alpha j+\alpha+1}\left(-\frac{1+\mu}{\lambda} s^\alpha\right) + (1+\mu)\frac{s^{\alpha j+\alpha}}{\lambda^{j+1}} E^{j+1}_{\alpha,\alpha j+\alpha+1}\left(-\frac{1+\mu}{\lambda} s^\alpha\right) =$$

$$= \lambda\, \partial^\alpha_{0s} w_j(s) + (1+\mu) w_j(s).$$

Отсюда получаем

$$\nabla_j w_j(s) = w_j(s) - w_{j-1}(s) = w_j(s) - \lambda\, \partial^\alpha_{0s} w_j(s) - (1+\mu) w_j(s) =$$

$$= -\lambda\, \partial^\alpha_{0s} w_j(s) - \mu\, w_j(s).$$

Таким образом, $\mathrm{w_j(s)}$ удовлетворяет уравнению (19).

Из определения (26) следует, что

$$E^0_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}.$$

Отсюда в силу (28) получаем, что $w_{-1}(s) = 1$ для всех положительных s. Также непосредственно из (28) следует, что $w_j(0) = 0$ для любого неотрицательного j. Следовательно, функция $\mathrm{w_j(s)}$, определенная формулой (28), удовлетворяет краевым условиям (20 и (21). Лемма доказана.

Теорема о представлении решения

Из лемм 1 и 2 следует теорема о представлении решения рассматриваемой задачи.

Теорема 1. *Пусть $\lambda \neq 0$, $\varphi(x) \in L(0,T)$ и $f(x) \in L(0,T)$. Если функция $u_n(x)$ является регулярным решением задачи (1), (5), (6), то она представима в виде*

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^x v_{n-k}(x-t)\, f_k(t)\, dt +$$

$$+\lambda \sum_{k=1}^{n} \tau_k\, v_{n-k}(x) + \int_0^x v_{n-1}(x-t)\varphi(t)\, dt, \tag{31}$$

где

$$v_n(x) = \frac{x^{\alpha n+\alpha-1}}{\lambda^{n+1}} E^{n+1}_{\alpha,\alpha n+\alpha}\left(-\frac{1+\mu}{\lambda} x^\alpha\right). \tag{32}$$

Доказательство. Представление (31) является прямым следствием лемм 1, 2. Для завершения доказательства остается показать справедливость равенства (32). Как следует из леммы 1, функция $v_n(x)$ определяется из соотношения

$$v_n(x) = \frac{d}{dx} w_n(x).$$

Поэтому в силу (28), принимая во внимание формулы (29) и (30), получаем

$$v_n(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^{\alpha n+\alpha}}{\lambda^{n+1}} E^{n+1}_{\alpha,\alpha n+\alpha+1}\left(-\frac{1+\mu}{\lambda} x^\alpha\right)\right] = \frac{x^{\alpha n}}{\lambda^{n+1}} E^{n+1}_{\alpha,\alpha n+\alpha}\left(-\frac{1+\mu}{\lambda} x^\alpha\right).$$

Теорема доказана.

Фундаментальное решение

Введем в рассмотрение функцию

$$v_n^{\rho}(x) = \frac{x^{\alpha n+\rho-1}}{\lambda^{n+1}} E_{\alpha,\alpha n+\rho}^{n+1}\left(-\frac{1+\mu}{\lambda}x^{\alpha}\right). \tag{33}$$

Сравнивая (33) с (28) и (32), нетрудно заметить, что

$$v_n^{\alpha}(x) = v_n(x)\,, \quad v_n^{\alpha+1} = w_n(x). \tag{34}$$

Для дальнейшего докажем ряд свойств функции $v_n^{\rho}(x)$. Сформулируем эти свойства в виде утверждения.

Лемма 3. *Пусть* $\lambda \neq 0$. *Тогда для функции* $v_n^{\rho}(x)$*, определенной равенством (33), справедливы следующие соотношения:*

$$D_{0x}^{\xi} v_n^{\rho}(x) = v_n^{\rho-\xi}(x) \qquad (\alpha n+\rho > 0), \tag{35}$$

$$v_n^{\rho}(x) = O(x^{\alpha n+\rho-1}), \quad x \to 0, \tag{36}$$

$$\lim_{x\to 0} x^{1-\alpha n-\rho}\, v_n^{\rho}(x) = \frac{\lambda^{-n-1}}{\Gamma(\alpha n+\rho)} \qquad (\alpha n+\rho \neq 0,-1,-2,\dots), \tag{37}$$

$$v_{n-1}^{\rho}(x) = \lambda\, v_n^{\rho-\alpha}(x) + (1+\mu)\, v_n^{\rho}(x) \tag{38}$$

и

$$\nabla_n v_n^{\rho}(x) + \lambda\, D_{0x}^{\alpha} v_n^{\rho}(x) + \mu\, v_n^{\rho}(x) = 0, \qquad (n = 1,2,\dots). \tag{39}$$

Доказательство. Формула (35) получается применением формулы (29) к равенству (33). Соотношения (36) и (37) следуют непосредственно из определений (26) и (33).

Для доказательства (38) воспользуемся формулой автотрансформации (30). Получаем:

$$v_{n-1}^{\rho}(x) = \frac{x^{\alpha n-\alpha+\rho-1}}{\lambda^{n}} E_{\alpha,\alpha n-\alpha+\rho}^{n}\left(-\frac{1+\mu}{\lambda}x^{\alpha}\right) =$$

$$= \frac{x^{\alpha n-\alpha+\rho-1}}{\lambda^{n}} E_{\alpha,\alpha n-\alpha+\rho}^{n+1}\left(-\frac{1+\mu}{\lambda}x^{\alpha}\right) +$$

$$+(1+\mu)\frac{x^{\alpha n+\rho-1}}{\lambda^{n+1}} E_{\alpha,\alpha n+\rho}^{n+1}\left(-\frac{1+\mu}{\lambda}x^{\alpha}\right) = \lambda\, v_n^{\rho-\alpha}(x) + (1+\mu) v_n^{\rho}(x).$$

Комбинируя (35) и (38), приходим к (39). Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$, $\lambda \neq 0$, $\rho \geq \alpha$, $f_n(x) \in L(0,T)$, *и*

$$F_{n,k}^{\rho}(x) = \int_0^x v_{n-k}^{\rho}(x-t)\, f_k(t)\, dt,$$

если $(n \geq k)$, *и* $F_{n,k}^{\rho}(x) = 0$, *если* $n < k$.

Тогда

$$\nabla_n F^{\rho}_{n,k}(x) + \lambda\, D^{\alpha}_{0x} F^{\rho}_{n,k}(x) + \mu\, F^{\rho}_{n,k}(x) = \begin{cases} D^{\alpha-\rho}_{0x} f_n(x), & k = n, \\ 0, & k < n, \end{cases} \tag{40}$$

и

$$D^{\xi-1}_{0x} F^{\rho}_{n,k}(x) \in AC[0,T), \qquad \lim_{x\to 0} D^{\xi-1}_{0x} F^{\rho}_{n,k}(x) = 0, \qquad \xi \le \rho. \tag{41}$$

Доказательство. В силу (35) и (36) имеем

$$D^{\alpha}_{0x} F^{\rho}_{n,k}(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x v^{\rho-\alpha+1}_{n-k}(x-t)\, f_k(t)\, dt =$$

$$= \frac{d}{dx}\int_0^x v^{1}_{n-k}(x-t)\, D^{\alpha-\rho}_{0x} f_k(t)\, dt = v^{1}_{n-k}(0)\, D^{\alpha-\rho}_{0x} f_k(x) +$$

$$+ \int_0^x v^{0}_{n-k}(x-t)\, D^{\alpha-\rho}_{0t} f_k(t)\, dt. \tag{42}$$

Рассмотрим сначала случай $k < n$. В этом случае из (42), с учетом (37) и (38), получаем

$$D^{\alpha}_{0x} F^{\rho}_{n,k}(x) = \int_0^x v^{0}_{n-k}(x-t)\, D^{\alpha-\rho}_{0t} f_k(t)\, dt = \int_0^x v^{\rho-\alpha}_{n-k}(x-t)\, f_k(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_0^x \left[v^{\rho}_{n-k-1}(x-t) - (1+\mu) v^{\rho}_{n-k}(x-t)\right] f_k(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left[F^{\rho}_{n-1,k}(x) - (1+\mu) F^{\rho}_{n,k}(x)\right].$$

Отсюда следует, что

$$\nabla_n F^{\rho}_{n,k}(x) + \lambda\, D^{\alpha}_{0x} F^{\rho}_{n,k}(x) + \mu\, F^{\rho}_{n,k}(x) = 0, \;\text{ если } k < n.$$

Пусть теперь $k = n$. Из (42), с учетом (37) и (38), следует, что

$$D^{\alpha}_{0x} F^{\rho}_{n,n}(x) = \frac{1}{\lambda} D^{\alpha-\rho}_{0x} f_n(x) + \int_0^x v^{0}_{0}(x-t)\, D^{\alpha-\rho}_{0t} f_n(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\lambda} D^{\alpha-\rho}_{0x} f_n(x) - \frac{1+\mu}{\lambda}\int_0^x v^{\alpha}_{0}(x-t)\, D^{\alpha-\rho}_{0t} f_n(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\lambda} D^{\alpha-\rho}_{0x} f_n(x) - \frac{1+\mu}{\lambda}\int_0^x v^{\rho}_{0}(x-t)\, f_k(t)\, dt = \frac{1}{\lambda} D^{\alpha-\rho}_{0x} f_n(x) - \frac{1+\mu}{\lambda} F^{\rho}_{n,n}(x).$$

Таким образом,

$$\nabla_n F^{\rho}_{n,n}(x) + \lambda\, D^{\alpha}_{0x} F^{\rho}_{n,n}(x) + \mu\, F^{\rho}_{n,n}(x) = D^{\alpha-\rho}_{0x} f_n(x).$$

Это завершает доказательство равенства (40).
Для доказательства (41) заметим:

$$D^{\xi-1}_{0x} F^{\rho}_{n,k}(x) = \int_0^x v^{\rho-\xi+1}_{n-k}(x-t)\, f_k(t)\, dt.$$

Отсюда в силу (36) следует (41). Лемма доказана.

Из лемм 3 и 4, с учетом (34), в частности, следует, что

$$\nabla_n v_n(x) + \lambda D_{0x}^{\alpha} v_n(x) + \mu v_n(x) = 0, \qquad n = 1,2,\ldots, \tag{43}$$

$$\nabla_n F_n(x) + \lambda D_{0x}^{\alpha} F_n(x) + \mu F_n(x) = f_n(x). \tag{44}$$

где

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^x v_{n-k}(x-t)\, f_k(t)\, dt,$$

а также

$$F_0(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1} F_n(x) = 0, \qquad n = 1,2,\ldots \tag{45}$$

Свойства (43), (44) и (45) позволяют назвать функцию $v_n(x)$, заданную равенством (32), *фундаментальным решением* уравнения (1).

Теорема о существовании и единственности решения

Теперь мы можем сформулировать основной результат – теорему о существовании и единственности решения задачи (1), (5), (6).

Теорема 2. *Пусть* $\lambda \neq 0$, $\varphi(x) \in L(0,T)$ *и* $f_n(x) \in L(0,T)$. *Тогда существует и притом единственное регулярное решение* $u(n,x) = u_n(x)$ *задачи (1), (5), (6), и оно представимо в виде (31).*

Доказательство. Единственность решения задачи (1), (5), (6) следует из теоремы 1 о представлении решения. Действительно, предположим, что существует два тождественно неравных регулярных решения задачи (1), (5), (6). Обозначим их $u_n^1(x)$ и $u_n^2(x)$. Тогда их разность

$$u_n^*(x) = u_n^1(x) - u_n^2(x)$$

в силу линейности рассматриваемой задачи является решением однородной задачи, т.е. решением задачи

$$\nabla_n u_n^*(t) + \lambda D_{0x}^{\alpha} u_n^*(x) + \mu u_n^*(x) = 0, \tag{46}$$

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1} u_n^*(x) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}; \qquad u_0^*(x) = 0. \tag{47}$$

В силу теоремы 1 решение задачи (46) и (47), если оно существует, тождественно равно нулю:

$$u_n^*(x) \equiv 0.$$

Таким образом, $u_n^1(x) \equiv u_n^2(x)$. Следовательно, наше предположение о существовании двух различных решений неверно. Это доказывает единственность решения рассматриваемой задачи.

Докажем существование решения. Для этого необходимо показать, что функция $u_n(x)$, заданная равенством (31), является регулярным решением уравнения (1) и удовлетворяет краевым условиям (5) и (6).

Примем следующие обозначения:

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^x v_{n-k}(x-t)\, f_k(t)\, dt,$$

$$\mathrm{T}_n(x) = \lambda \sum_{k=1}^{n} \tau_k\, v_{n-k}(x)$$

и

$$\Phi_n(x) = \int_0^x v_{n-1}(x-t)\varphi(t)\,dt.$$

Из лемм 3 и 4, а также равенств (43), (44) и (45) следует, что функция $u_n(x)$ удовлетворяет уравнению (1). Также $F_n(x), \mathrm{T}_n(x), \Phi_n(x) \in AC\,[0,T)$ и

$$\lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1} F_n(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1} T_n(x) = \tau_n \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0} D_{0x}^{\alpha-1} \Phi_n(x) = 0.$$

Поэтому для функции выполняется краевое условие (5). Для завершения доказательства теоремы остается показать справедливость (36).

Заметим, что мы не можем принять $n = 0$ в правой части (31), так как она не определена для данного значения n. Запишем уравнение (1) для $n = 1$:

$$\nabla_1 u_1(x) + \lambda D_{0x}^{\alpha} u_1(x) + \mu u_1(x) = f_1(x)$$

или после простых преобразований:

$$u_0(x) = u_1(x)(1+\mu) + \lambda\, u_1 D_{0x}^{\alpha} u_1(x) - f_1(x). \tag{48}$$

Для функции $u_n(x)$, определенной равенством (31), в данном случае имеем

$$u_1(x) = \int_0^x v_0(x-t)\, f_1(t)\,dt + \lambda\tau_1 v_0(x) + \int_0^x v_0(x-t)\varphi(t)\,dt, \tag{49}$$

где

$$v_0(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\lambda}\, E_{\alpha,\alpha}\left(-\frac{1+\mu}{\lambda}x^{\alpha}\right).$$

Подставляя (49) в (48), пользуясь свойством функции Миттаг-Леффлера [10]

$$D_{0x}^{\alpha} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\xi(x-t)^{\alpha})\; g(t)\,dt =$$

$$= g(x) - \xi \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\xi(x-t)^{\alpha})\; g(t)\,dt,$$

получаем, что $u_0(x) = \varphi(x)$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с. ISBN: 5-9221-0440-3. EDN: UGLEPD

2. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. 636 с. ISBN: 978-5-9963-0449-3. EDN: QJXMXL

3. *Кенетова Р. О., Лосанова Ф. М.* О нелокальной краевой задаче для обобщенного уравнения Мак-Кендрика – фон Ферстера // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2017. № 2(76). С. 49–53. EDN: ORSLWH

4. *Лосанова Ф. М.* Об одной математической модели с обобщенным уравнением Мак-Кендрика – фон Ферстера // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки, 2020. Т. 33. № 4. С. 71–77. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-33-4-71-77

5. *Богатырева Ф. Т.* Краевые задачи для уравнения в частных производных первого порядка с операторами Джрбашяна – Нерсесяна // Челябинский физико-математический журнал. 2021. Т. 6. № 4. С. 403–416. DOI: 10.47475/2500-0101-2021-16401

6. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1958. 749 с.

7. *Prabhakar T. R.* A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel // Yokohama Math. J., 1971. Vol. 19. Pp. 7–15.

8. *Garra R., Garrappa R.* The Prabhakar or three-parameter Mittag-Leffler function: theory and application // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 2018. Vol. 56. Pp. 314–329.

9. *Shukla A. K., Prajapati J. C.* On a generalization of Mittag-Leffler function and its properties // J. Math. Anal. Appl. 2007. Vol. 336. Pp. 797–811.

10. *Богатырева Ф. Т., Гадзова Л. Х., Эфендиев Б. И.* Основы дробного интегрирования и дифференцирования: методическое пособие. Нальчик: Издательство КБНЦ РАН, 2020. 46 с. ISBN 978-5-6045584-2-3. EDN: UJQESX

REFERENCES

1. Nakhushev A.M. *Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye* [Fractional calculus and its application]. Moscow: FIZMATLIT, 2003. 272 p. ISBN: 5-9221-0440-3. EDN: UGLEPD. (In Russian)

2. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow: BINOM. Knowledge Laboratory, 2011. 636 p. ISBN: 978-5-9963-0449-3. EDN: QJXMXL. (In Russian)

3. Kenetova R. O., Losanova F. M. On a nonlocal boundary value problem for the generalized McKendrick – von Förster equation. *News of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*. 2017. No. 2(76). Pp. 49–53. EDN: ORSLWH. (In Russian)

4. Losanova F.M. About one mathematical model with the generalized McKendrick – von Förster equation. *Vestnik KRAUNC. Phys.-math. Sciences.* 2020. Vol. 33. No. 4. Pp. 71–77. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-33-4-71-77. (In Russian)

5. Bogatyreva F.T. Boundary value problems for first order partial differential equations with Dzhrbashyan – Nersesyan operators. *Chelyab. Phys.-Math. zhur*. 2021. Vol. 6. No. 4. Pp. 403–416. DOI: 10.47475/2500-0101-2021-16401. (In Russian)

6. Lavrentyev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsiy kompleksnoy peremennoy* [Methods of the theory of functions of a complex variable]. Moscow: FIZMATGIZ, 1958. 749 p. (In Russian)

7. Prabhakar T.R., A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel. *Yokohama Math. J.* 1971. No. 19. Pp. 7–15.

8. Garra R., Garrappa R. The Prabhakar or three parameter Mittag-Leffler function: Theory and application. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.* 2018. No. 56. Pp. 314–329.

9. Shukla A.K., Prajapati J.C. On a generalization of Mittag-Leffler function and its properties. *J. Math. Anal. Appl.* 2007. No. 336. Pp. 797–811.

10. Bogatyreva F.T., Gadzova L.Kh., Efendiev B.I. *Osnovy drobnogo integrirovaniya i differentsirovaniya: metodicheskoye posobiye* [Fundamentals of fractional integration and differentiation: Methodical manual]. Nalchik: Izdatel'stvo KBNTS RAN, 2020. 46 p. ISBN 978-5-6045584-2-3. EDN: UJQESX. (In Russian)

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Contribution of the authors: the authors contributed equally to this article. The authors declare no conflicts of interests.

Финансирование. Исследование проведено без спонсорской поддержки.

Funding. The study was performed without external funding.

Информация об авторах

Видзижева Лейла Магомедовна, аспирант, Научно-образовательный центр Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук;
360010, Россия, г. Нальчик, ул. Балкарова, 2;
Канаметова Дана Асланбиевна, к.э.н., науч. сотр., Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра РАН;
360000, Россия, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А;
danocha_999@mail.ru, SPIN-код: 6070-1196

Information about the authors

Leila M. Vidzizheva, Post-graduate Student, Scientific and Educational Center, Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences;
360010, Russia, Nalchik, 2 Balkarov street;
Dana A. Kanametova, Candidate of Economic Sciences, Researcher, Institute of Applied Mathematics and Automation – branch of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences;
360000, Russia, Nalchik, 89 A Shortanov street;
danocha_999@mail.ru, SPIN-code: 6070-1196